المراجعة النهائية

الصف الثالث الثانوى

فى

الجبر

منتدى توجيه الرياضيات

أ/ عادل إدوار

التباديل والتوافيق

أولاً : اكمـــــــــل :

(١) إذا كان $^{١٢}ق_{ر} = {}^{١٢}ق_{٢ر}$ فإن قيم ر هي ... .

(٢) إذا كان $^{٧}ق_{ن+٥} = {}^{٧}ق_{٢ن-١}$ فإن ن = ...

(٣) $^{م}ل_{٧} = م(م-١)(م-٢)\ldots\ldots\times ١٣$ فإن م = ...

(٤) إذا كان $^{ن}ق_{ن-١٢} = ١٠٥$ فإن ن = ...

(٥) إذا كان $\frac{(٢ن-٥)!}{(ن-٥)!} = \frac{(ن+٣)!}{٣!}$ فإن ن = ...

(٦) إذا كانت س = { س : س عدد صحيح ، -٤ ≤ س ≤ ٥ } ،

، ع = { (أ ، ب ، جـ) : أ ، ب ، جـ ∈ س ، أ ≠ ب ≠ جـ }

فإن عدد عناصر ع = ...

، ص = { { أ ، ب } : أ ، ب ∈ س } فإن عدد عناصر ص = ...

(٧) إذا كان س $(٣س-١)! = ٢٤٠$ فإن س = ...

(٨) إذا كان $^{٧}ق_{ر} > ١$ ، $^{ر}ق_{٥} > ١$ فإن $ر! = $ ....

(٩) عدد الطرق الممكنة لتكوين عدد زوجي مكون من ثلاث أرقام مختلفة من الاعداد ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ يساوي ....

(١٠) عدد الطرق الممكنة لتكوين عدد يقبل القسمة علي ٥ و مكون من ثلاث ارقام من الاعداد ٠ ، ١ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ يساوي ....

(١١) عدد الطرق الممكنة لاختيار لجنة من ثلاث اشخاص من بين ٨ شخص يساوي ..

(١٢) إذا كان $^{٧}ق_{ر} : {}^{٧}ق_{ر-١} = ٣ : ٥$ فإن ر = ...

(١٣) أصغر قيمة للعدد ن التي تجعل $^{ن}ل_{ر-٢} = ٢٤ \; {}^{ن}ق_{ر-٢}$ تساوي .....

(١٤) إذا كان $^{ن}ق_{٥} > {}^{ن}ق_{٣}$ فإن اقل قيمة للعدد ن هي ....

(١٥) عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاث عناصر من المجموعة {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٩} يساوي ....

(١٦) إذا كان $(ن+٩)! = (ن-٨)! \times {}^{١٩}ل_{١٧}$ فإن ن = ...

التباديل والتوافيق

(١٧) عدد المجموعات الجزئية من المجموعة {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٩} يساوي ....

(١٨) إذا كان $^{ن}ق_{ر} = ٥\,ن$ ، $^{ن}ل_{ر+١} = ٢١٠$ فإن $\lfloor ن - ر$ = ...

(١٩) مجموعة حل المتباينة $^{ن}ق_{٤} \geq {}^{ن}ق_{٤}$ هي ....

(٢٠) إذا كان العامل الأوسط في مفكوك $^{ن}ل_{٧}$ يساوي ٩ فإن ن = ...

(٢١) إذا كان : $^{ن}ق_{٢} + {}^{ن}ق_{١} = ٢١$ فإن ن = ...

(٢٢) إذا كان : $\lfloor ٦ = {}^{م}ق_{٢} \times {}^{م}ل_{٢}$ فإن م = ...

(٢٣) إذا كان : $\lfloor ٦ = {}^{س}ق_{٢} \times {}^{س}ل_{٢}$ فإن س = ...

(٢٤) عدد طرق توزيع ٦ جوائز علي ثلاث اشخاص بالتساوي = ...

(٢٥) إذا كان : $\frac{\lfloor ن - ٢}{\lfloor ٢} = \frac{\lfloor م}{ن - ٢}$ فإن ن = ...

ثانياً :

(١) إذا كان $\lfloor ن = ٧٢٠$ ، $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} = \frac{٣}{٤}$ فأوجد $^{ن}ل_{ر}$

(٢) إذا كان : $^{١١}ق_{ر} = {}^{١١}ق_{ر+٣}$ ، $^{ن}ل_{ر} = ٢١٠$ فأوجد قيمة $\lfloor ن - ر$

(٣) إذا كان : $^{ن+٢}ل_{م-ن} = ١٦٨٠$ ، $^{ن-٢}ق_{٢} = ٦$ أوجد $^{ن+٢}ل_{م}$

(٤) إذا كان : $^{٢ن+٥}ل_{ر} : {}^{٢ن+٥}ق_{ر} = ٢ : ١$ ، $^{ن}ق_{س+٢} : {}^{ن}ق_{س} = ٥ : ٣$

فأوجد قيمة $^{٢ن}ق_{ن-س}$

(٥) إذا كان : $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} : ٥ \times {}^{ن-١}ق_{ر-١} = ٧ : ٤ : ٦$

فأوجد قيمة : $\frac{\lfloor ن - ٤}{(\lfloor ر)^{٢}}$

(٦) إذا كان : $^{ن+١}ل_{ر+١} = ٧ \times {}^{ن}ل_{ر}$ ، $٤ \times {}^{ن}ق_{ر} = ٣ \times {}^{ن}ق_{ر-١}$

فأوجد قيمة : $\lfloor ن - ر - ٢$

(٧) إذا كان $^{2ن+1}ل_{ن-1} : {}^{2ن}ق_{ن+1} = \frac{3}{2}\,\underline{|ن-1}$ فما قيمة ن؟

(٨) إذا كان: $^{11}ق_{ر} = {}^{11}ق_{ر+2}$ ، $\underline{|ن-ر} = 24$ أوجد $^{ن}ل_{ر}$

(٩) إذا كان: $^{ن}ل_{ر} = 210$ ، $\underline{|ن-ر} = 24$ أثبت أن $^{11}ق_{ر} = {}^{11}ق_{ر+2}$

(١٠) إذا كان: $^{ن}ل_{ر} = 2$ ، $^{ن+2}ل_{ر} = 90$ أوجد قيمة: $^{ن+2}ق_{ن-2}$

(١١) إذا كانت س مجموعة غير خالية عدد عناصرها ن ،

$ع_1 = \{(أ ، ب ، جـ) : أ ، ب ، جـ \in س\}$ ،

$ع_2 = \{(أ ، ب) : أ ، ب \in س ، أ \neq ب\}$.

وكان عدد عناصر $ع_1$ = عدد عناصر $ع_2$ فأوجد قيمة ن

وإذا كان: $4ك\,\underline{|2ك-1} = \frac{32}{9} \times \frac{^{11}ق_{ن} + {}^{11}ق_{ن-1}}{^{12}ق_{ن}} + 5ن$

فأوجد قيمة ك

(١٢) إذا كان: $^{س}ل_{ص} = 360$ ، $\underline{|2س+ص} = 5040$

فأوجد قيمة: $^{ص}ق_{2س}$

(١٣) إذا كان $^{ن}ق_{ر+3} = {}^{ن}ق_{2ر-7}$ ، $^{ن}ل_{ر} = 720$ أوجد قيمة كل من ن ، ر

(١٤) إذا كان $2\,\underline{|2ن-4} = \underline{|ن-4}\;\underline{|ن+2}$ ، $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ر-2}$ ،

أوجد قيمة $\underline{|ن-ر}$

(١٥) اثبت أن $^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+1} = {}^{ن+1}ق_{ر+1}$ ومن ثم

(أ) اثبت أن: $^{ن}ق_{ر} + 2\,{}^{ن}ق_{ر-1} + {}^{ن}ق_{ر-2} = {}^{ن+2}ق_{ر}$

(ب) حل المعادلة $\frac{^{17}ق_{ر} + {}^{17}ق_{ر+1}}{^{17}ق_{ر+1} + {}^{17}ق_{ر+2}} = \frac{7}{12}$ (ر = ٥)

التباديل والتوافيق

(١٦) إذا كان ${}^{ن}ق_{ر+2} \times {}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ر+1} \times {}^{ن}ق_{ر-1}$ ، ${}^{ن}ل_{ر} = 120 \times {}^{ن}ق_{ن-ر}$

أوجد قيمة $\underline{|ن - ر}$ (٣٠)

(١٧) إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر-1} \times {}^{ن}ق_{ر+1} \geq {}^{ن}ق_{ر} \times {}^{ن}ق_{ر+1}$ إثبت أن : $ن \geq 2ر + 1$

(١٨) إذا كان ${}^{ن}ق_{ن-ر} : {}^{ن}ق_{ر-1} = 3 : 5$

، ${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-1} = \frac{1}{120}\ {}^{ن+1}ل_{ر}$ أوجد قيمة ن ، ر

(١٩) إذا كان ${}^{ن}ق_{ن-2} - {}^{ن}ق_{ن-3} = \frac{1}{6}ن^3 - ن^2 + {}^{4}ل_{1}$ ،

، $\underline{|ر + 7} = \underline{|ر - 7} \times {}^{19}ل_{14}$ أوجد قيمة $\underline{|2ن - ر}$

إجابة تمارين التباديل والتوافيق

(١) ر = ٠ ، ١ (٢) ن = ١ ، ن = ٦ مرفوضة (٣) م = ٢٤

(٤) ر = ١٥ (٥) ن = ٨

(٦) ن(ع) = $ل^{١٠}_{٣}$ = ٧٢٠ ، ن(ص) = $ق^{١٠}_{٢}$ = ٤٥ (٧) س = ٢

(٨) $\underline{|ر} = \underline{|٦}$ = ٧٢٠ (٩) ١٢ (١٠) ٦٠

(١١) $ق^{١٢}_{٣}$ = ٢٢٠ (١٢) ر = ٥ (١٣) ٤

(١٤) ٩ (١٥) $ق^{٥}_{٢}$ = ١٠ (١٦) ١٠

(١٧) $ق^{٥}_{٠} + ق^{٥}_{١} + ق^{٥}_{٢} + ق^{٥}_{٣} + ق^{٥}_{٤} + ق^{٥}_{٥}$ = ٣٢ (١٨) $\underline{|٥}$ = ١٢٠

(١٩) {٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩} (٢٠) ن = ١٢ (٢١) ن = ٦

(٢٢) م = ٥ (٢٣) س = ٩

(٢٤) $ق^{٦}_{٢} \times ق^{٤}_{٢} \times ق^{٢}_{٢}$ = ٩٠ (٢٥) ن = ٩

ثانياً

(١) ∵ $\underline{|ن} = \underline{|٦}$ ∴ ن = ٦ ، ∵ $\frac{ن - ر + ١}{ر} = \frac{٣}{٤} \Leftarrow \frac{٧ - ر}{ر} = \frac{٣}{٤}$

∴ ٣ر = ٢٨ − ٤ر ⟸ ٧ر = ٢٨ ⟸ ر = ٤ ⟸ $ل^{ن}_{ر} = ل^{٦}_{٤}$ = ٣٦٠

(٢) ∵ ٢ر + ٣ = ر ⟸ ر = −٣ مرفوضة .

أو ر + ٢ر + ٣ = ١٢ ⟸ ٣ر = ٩ ⟸ ر = ٣

∵ $ل^{ن}_{ر}$ = ٢١٠ ⟸ $ل^{ن}_{٣} = ل^{٧}_{٣}$ ⟸ ن = ٧

∴ $\underline{|ن - ر} = \underline{|٤}$ = ٢٤

(٣) ∵ $^{ن}ق_{ن-٣} = {}^{ن}ق_{٤}$ ⇐ ن − ٣ = ٤ ∴ $^{ن+٣}ل_{٤} = ١٦٨٠ = {}^{٨}ل_{٤}$

∴ ن + ٣ = ٨ ⇐ $^{ن+٣}ل_{٣} = {}^{٨}ل_{٣} = ٣٣٦$

(٤) $^{ن+٢}ل_{ر} : \frac{^{ن+٢}ل_{ر}}{ر!} = ١ : ٢$ ⇐ $^{ن+٢}ل_{ر} \times \frac{ر!}{^{ن+٢}ل_{ر}} = ٢$

∴ ر! = ٢! ⇐ ر = ٢ ، ∵ $\frac{ن-(ر+١)+١}{ر+١} = \frac{٥}{٣}$

∴ $\frac{ن-٢}{٣} = \frac{٥}{٣}$ ⇐ ن = ٧ ∴ $^{٢ن}ق_{ن-ر} = {}^{١٤}ق = ٢٠٠٢$

(٥) ∵ $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} = ٧ : ٤$ ⇐ $\frac{ن-ر+١}{ر} = \frac{٧}{٤}$ ⇐ [٤ن − ١١ر = −٤] ← ①

∵ $^{ن}ق_{ر-١} : ٥ \times {}^{ن-١}ق_{ر-٢} = ٦ : ٤$ ⇐ $\frac{ن!}{(ر-١)!\,(ن-ر+١)!} : \frac{٥\,(ن-١)!}{(ر-٢)!\,(ن-ر+١)!} = ٣ : ٢$

∴ $\frac{ن!}{(ر-١)!\,(ن-ر+١)!} \times \frac{(ر-٢)!\,(ن-ر+١)!}{٥\,(ن-١)!} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{ن\,(ن-١)!}{(ر-١)\,(ر-٢)!\,(ن-ر+١)!} \times \frac{(ر-٢)!\,(ن-ر+١)!}{٥\,(ن-١)!} = \frac{٢}{٣}$

$\frac{ن}{٥ر-٥} = \frac{٢}{٣}$ ⇐ ٣ن = ١٠ر − ١٠ ⇐ [٣ن − ١٠ر = −١٠] ← ②

من ①، ② ن = ١٠ ، ر = ٤

(٦) ∵ $\frac{(ن+١)!}{(ن-ر)!} = ٧ \times \frac{ن!}{(ن-ر)!}$ ⇐ (ن+١) ن! = ٧ ن!

∴ ن + ١ = ٧ ⇐ ن = ٦

∵ $\frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{٣}{٤}$ ⇐ $\frac{ن-ر+١}{ر} = \frac{٣}{٤}$ ⇐ $\frac{٧-ر}{ر} = \frac{٣}{٤}$

∴ ٣ر = ٢٨ − ٤ر ⇐ ٧ر = ٢٨ ⇐ ر = ٤

∴ (ن − ر − ٢)! = (٦ − ٤ − ٢)! = ٠! = ١

التباديل والتوافيق

(٧) $\because \dfrac{|2ن+1}{|ن+2} \div \dfrac{|2ن}{|ن+1 \; |ن-1} = \dfrac{3}{2} \; |ن-1$

$\dfrac{|2ن+1}{|ن+2} \times \dfrac{|ن+1 \; |ن-1}{|2ن} = \dfrac{3}{2} \; |ن-1$

$\dfrac{(2ن+1)\,|2ن}{(ن+2)\,|ن+1} \times \dfrac{|ن+1 \; |ن-1}{|2ن} = \dfrac{3}{2} \; |ن-1$

$\dfrac{2ن+1}{ن+2} = \dfrac{3}{2} \Longleftarrow 3ن + 6 = 4ن + 2 \Leftarrow ن = 4$

(٨) $\because 2ر + 2 = ر \Longleftarrow ر = -2$ مرفوضة

$2ر + 3 + ر = 12 \Longleftarrow 2ر = 6 \Longleftarrow ر = 3$

$\therefore |ن-3 = |4 \Longleftarrow ن - 3 = 4 \Longleftarrow ن = 7$

$\therefore {}^{ن}ل_{ر} = {}^{7}ل_{3} = 336$

(٩) $\because {}^{ن}ل_{ر} = 210 \Longleftarrow \dfrac{|ن}{|ن-ر} = 210 \Longleftarrow \dfrac{|ن}{24} = 210$

$\therefore |ن = 5040 \Longleftarrow |ن = |7 \Longleftarrow ن = 7$

$\therefore {}^{ن}ل_{ر} = {}^{7}ل_{ر} = {}^{7}ل_{3} \Longleftarrow ر = 3$

$\therefore {}^{12}ق_{ر} = {}^{12}ق_{3} \;,\; {}^{12}ق_{2ر+3} = {}^{12}ق_{9} = {}^{12}ق_{3} \Longleftarrow {}^{12}ق_{ر} = {}^{12}ق_{2ر+3}$

(١٠) $\because {}^{ن}ل_{2} = {}^{2}ل_{ن} \Leftarrow ن = 2 \;,\; {}^{م+3}أ_{2} = {}^{10}أ_{2} \Leftarrow م + 3 = 10 \Leftarrow م = 7$ … $= 8$

$\therefore {}^{م+ن+3}ق_{م-ن} = {}^{10}ق_{6} = 210$

(١١) $ن(ع) = {}^{ن}ل_{2}$ ، $ن(ص) = {}^{ن}ق_{2}$

$\therefore {}^{ن}ل_{2} - {}^{ن}ق_{2} \longleftarrow \dfrac{|ن}{|ن-2} - \dfrac{|ن}{|2 \; |ن-2} = \dfrac{1}{(ن-2)\,|ن-3} = \dfrac{1}{6\,|ن-3}$

$\therefore ن - 2 = 6 \Longleftarrow ن = 8$ $\quad \therefore 4\, {}^{ك}ل \dfrac{|2ك-1}{} = 8 + 40$

$4\, {}^{ك}ل\, \dfrac{|10-1}{} = 48 \Longleftarrow {}^{ك}ل\, \dfrac{|2ك-1}{} = 24$

$|ك = |4 \Longleftarrow ك = 4 \Longleftarrow ك = 2$

التباديل والتوافيق

(١١) ∵ $^{س+ص}ل_{٢} = {}^{٦}ل_{٢}$ ⟸ س + ص = ٦ ⟵ (١)

∵ $\underline{|٢س+ص} = \underline{|٧}$ ⟸ ٢س + ص = ٧ ⟵ (٢)

∴ س = ١ و ص = ٥ ⟸ $^{ص}ق_{ص-٣س} = {}^{٥}ق_{٢} = ١٠$

(١٢) ∵ ر + ٢ = ٧ − ر ⟸ ٢ر = ٤ ⟸ ر = ٢

، ر + ٢ + ٧ − ر = ن ⟸ ن = ١٠

∵ $^{ن}ل_{ر} = ٧٢٠$ ⟸ $^{ن}ل_{٢} = ٩٠ \neq ٧٢٠$ مرفوض

أو $^{١٠}ل_{ر} = ٧٢٠$ ⟸ $^{١٠}ل_{ر} = {}^{١٠}ل_{٣}$ ⟸ ر = ٣ ، ن = ١٠

(١٣) ∵ ر + ٢ = ٧ − ر ⟸ ٢ر = ٤ ⟸ ر = ٢

، ر + ٢ + ٧ − ر = ن ⟸ ن = ١٠

∵ $^{ن}ل_{ر} = ٧٢٠$ ⟸ $^{ن}ل_{٢} = ٩٠ \neq ٧٢٠$ مرفوض

أو $^{١٠}ل_{ر} = ٧٢٠$ ⟸ $^{١٠}ل_{ر} = {}^{١٠}ل_{٣}$ ⟸ ر = ٣ ، ن = ١٠

(١٤) ∵ $\frac{|٢ن-٤}{|ن-٤} = \frac{|ن+٢}{|٢}$ ⟸ $^{٢ن-٤}ل_{ن} = {}^{ن+٢}ل_{ن}$

∴ ٢ن − ٤ = ن + ٢ ⟸ ن = ٦

∴ $^{٦}ق_{ر} = {}^{٦}ق_{٢ر-٩}$ ⟸ ٢ر − ٩ = ر ⟸ ر = ٩ مرفوض

أو ٢ر − ٩ + ر = ٦ ⟸ ٣ر = ١٥ ⟸ ر = ٥

∴ $\underline{|ن-ر} = \underline{|٦-٥} = \underline{|١} = ١$

(15) الأيمن $= \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر \, \lfloor ن-ر} + \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر+1 \, \lfloor ن-ر-1} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر \, (ن-ر) \lfloor ن-ر-1} + \frac{\lfloor ن}{(ر+1) \lfloor ر \, \lfloor ن-ر-1}$

$= \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر \, \lfloor ن-ر-1} \left(\frac{1}{ن-ر} + \frac{1}{ر+1} \right) = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر \, \lfloor ن-ر-1} \times \frac{ر+1+ن-ر}{(ن-ر)(ر+1)}$

$= \frac{(ن+1) \lfloor ن}{(ر+1) \lfloor ر \, (ن-ر) \lfloor ن-ر-1} = \frac{\lfloor ن+1}{\lfloor ر+1 \, \lfloor ن-ر} = {}^{ن+1}ق_{ر+1}$ = الأيسر

(ب) الأيمن $= {}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-1} + {}^{ن}ق_{ر-1} + {}^{ن}ق_{ر-2} = {}^{ن+1}ق_{ر} + {}^{ن+1}ق_{ر-1} = {}^{ن+2}ق_{ر}$

(جـ) $\frac{{}^{18}ق_{ر+1}}{{}^{18}ق_{ر+2}} = \frac{7}{12} \Longrightarrow \frac{18-(ر+2)+1}{ر+2} = \frac{12}{7}$

$\therefore \frac{17-ر}{ر+2} = \frac{12}{7} \Longrightarrow 12ر + 24 = 7 \times 17 - 7ر$

$\therefore 19ر = 95 \Longrightarrow ر = 5$

(16) $\because {}^{ن}ل_{ر} = 120 \times {}^{ن}ق_{ر} \Longrightarrow {}^{ن}ل_{ر} = 120 \times \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{\lfloor ر} \Longrightarrow \lfloor ر = 120$

$\therefore \lfloor ر = \lfloor 5 \Longrightarrow ر = 5$

$\therefore {}^{ن}ق_{7} \times {}^{ن}ق_{5} = {}^{ن}ق_{6} \times {}^{ن}ق_{4} \Longrightarrow \frac{{}^{ن}ق_{7}}{{}^{ن}ق_{6}} = \frac{{}^{ن}ق_{4}}{{}^{ن}ق_{5}}$

$\therefore \frac{ن-7+1}{7} = \frac{5}{ن-5+1} \Longrightarrow \frac{ن-6}{7} = \frac{5}{ن-4}$

$\therefore ن^2 - 10ن + 24 = 35 \Longrightarrow ن^2 - 10ن - 11 = 0$

$\therefore (ن-11)(ن+1) = 0 \Longrightarrow ن = 11$ أو $ن = -1$ مرفوض

$\therefore \frac{\lfloor ن}{\lfloor ن-ر} = \frac{\lfloor 11}{\lfloor 11-5} = \lfloor 6 = 720$

(17) $\because \frac{{}^{ن}ق_{ر+2}}{{}^{ن}ق_{ر+1}} \leq \frac{{}^{ن}ق_{ر-1}}{{}^{ن}ق_{ر}} \Longrightarrow \frac{ن-(ر+2)+1}{ر+2} \leq \frac{ر}{ن-ر+1}$

$\therefore \frac{ن-ر-1}{ر+2} \leq \frac{ر}{ن-ر+1} \Longrightarrow (ن-ر)^2 - 1 \leq ر^2 + 2ر$

$\therefore (ن-ر)^2 \leq ر^2 + 2ر + 1 \Longrightarrow (ن-ر)^2 \leq (ر+1)^2$

$\therefore ن-ر \leq ر+1 \Longrightarrow ن \leq 2ر+1$

(١٨) ∵ $^{ن}ق_{ر-1} : {}^{ن}ق_{ر} = ٣ : ٥$ ← $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-1} = ٥ : ٣$

∴ $\frac{ن - ر + ١}{ر} = \frac{٣}{٥}$ ⟸ $٥ن - ٥ر + ٥ = ٣ر$

∴ $٥ن - ٨ر = -٥$ ← ①

∵ $^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-1} = {}^{ن+1}ق_{ر}$ ⟸ $^{ن+1}ق_{ر} = \frac{1}{120}\ {}^{ن+1}ل_{ر}$

∴ $\frac{^{ن+1}ل_{ر}}{ر!} = \frac{1}{120}\ {}^{ن+1}ل_{ر}$ ⟸ $ر! = ١٢٠$ ← $ر = ٥$

∴ $ر = ٥$ ← بالتعويض في ① ← $٥ن = ٣٥$ ← $ن = ٧$

(١٩) ∵ $^{ن}ق_{ن-3} - {}^{ن}ق_{ن-2} = \frac{1}{6}ن^3 - ن^2 + {}^{5}ل_{1}$

∴ $^{ن}ق_{3} - {}^{ن}ق_{2} = \frac{1}{6}ن^3 - ن^2 + ٥$

$\frac{ن!}{٣!\ (ن-٣)!} - \frac{ن!}{٢!\ (ن-٢)!} = \frac{1}{6}ن^3 - ن^2 + ٥$

$\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{٦} - \frac{ن(ن-١)}{٢} = \frac{1}{6}ن^3 - ن^2 + ٥$

بالضرب × ٦

∴ $ن(ن-١)(ن-٢) - ٣ن(ن-١) = ن^3 - ٦ن^2 + ٣٠$

$ن(ن-١)(ن-٢-٣) = ن^3 - ٦ن^2 + ٣٠$

$ن(ن-١)(ن-٥) = ن^3 - ٦ن^2 + ٣٠$

$ن^3 - ٦ن^2 + ٥ن = ن^3 - ٦ن^2 + ٣٠$

∴ $٥ن = ٣٠$ ⟸ $ن = ٦$

∵ $(ر+٧)! = (ر-٧)! \times {}^{19}ل_{14}$ ⟸ $\frac{(ر+٧)!}{(ر-٧)!} = {}^{19}ل_{14}$

∴ $^{ر+٧}ل_{14} = {}^{19}ل_{14}$ ⟸ $ر + ٧ = ١٩$ ⟸ $ر = ١٢$

∴ $(٢ن - ر)! = (١٢ - ١٢)! = صفر! = ١$

نظرية ذات الحدين

أولاً : أكمل :

(1) الحد الأوسط في مفكوك $(أ + ب)^{16}$ هو الحد .... وقيمته ....

(2) الحد الثالث في مفكوك $(1 + س)^{10}$ = ...

(3) أكبر معامل في مفكوك $(2 + \frac{س}{3})^{9}$ هو معامل الحد .... وقيمته = ...

(4) الحد الرابع من النهاية في مفكوك $(\frac{1}{2}س + \frac{3}{س})^{9}$ يساوي ....

(5) مجموع معاملات حدود المقدار $(3س - \frac{1}{س})^{8}$ يساوي ....

(6) مجموع معاملات حدود المقدار $(2س^2 - \frac{3}{س})^{15}$ يساوي ....

(7) الحد الأوسط في مفكوك $(5س - \frac{1}{2س})^{12}$ هو الحد .... وقيمته ....

(8) في مفكوك $(2س - \frac{1}{س})^{12}$ الحد الرابع حسب قوى س التصاعدية = ...

(9) في مفكوك $(\frac{1}{س} - س^2)^{9}$ حسب قوى س التصاعدي إذا كان $ح_5 = 12ح_4$ فإن س = ...

(10) في مفكوك $(1 + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل $س^3$ يساوي معامل $س^6$ فإن ن = ...

(11) ${}^{ن}ق_0 + {}^{ن}ق_1 + {}^{ن}ق_2 + {}^{ن}ق_3 +$ .... $+ {}^{ن}ق_{ن} =$ ....

(12) الحد الخالي من س في مفكوك $(2س - \frac{1}{9س^2})^{12}$ هو الحد .... وقيمته = ...

(13) حاصل ضرب معاملات الحدود في مفكوك $(1 + س)^{5}$ يساوي ....

(14) في مفكوك $(س^2 - \frac{1}{س})^{ن+3}$ إذا كان الحد الأوسط هو $ح_9$ فإن ن = ...

(15) إذا كان $(1 - س)^{9} = م_0 + م_1 س + م_2 س^2 + م_3 س^3 + \cdots + م_9 س^9$

فإن (1) $م_0 + م_1 + م_2 + م_3 + \cdots + م_9 =$ ....

(2) $م_0 + 2م_1 + 2^2م_2 + 2^3م_3 + \cdots + 2^9م_9 =$ ....

(3) $(م_0 - م_1) + (م_2 - م_3) + \cdots + (م_8 - م_9) =$ ....

(16) إذا كان $(1 + س)^{ن} - (1 - س)^{ن} = 2(1 + {}^{5}ق_2 س^2 + {}^{5}ق_4 س^3)$ فإن ن = ...

نظرية ذات الحدين

إجابة التمارين الموضعية :

(١) التاسع وقيمته = ١٢٨٧٠ $أ^{٨} ب^{٨}$

(٢) ٤٥ $س^{٢}$

(٣) الثاني ، **قيمته ٧٦٨**

(٤) ٧٦٥٤.٥ $س^{-٣}$

(٥) **٢٥٦**

(٦) **ـ١**

(٧) $ح_{٧}$ وقيمته (٩٢٤) × $(\frac{٣}{٢})^{٦}$

(٨) **ـ ١٧٦٠ $س^{-٦}$**

(٩) **ـ ٢**

(١٠) ٩

(١١) $٢^{٧}$

(١٢) $ح_{٥}$ وقيمته ٥٣٧٦٠

(١٣) ٢٥٠٠

(١٤) ٩

(١٥) $٢^{٩}$ ، $٣^{٩}$ ، صفر

(١٦) ٤ ، أ ، ٥

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

ثانياً :

(١) فى مفكوك $\left(\text{س} + \frac{٢}{\text{س}^{٢}}\right)^{١٢}$ حسب قوى س التنازلية .

أوجد : (أ) معامل الحد الأوسط . (ب) قيمة الحد الخالى من س

(جـ) أوجد قيمة س التى تجعل $٨\,\text{ح}_{١٠} = ٤٥\,\text{ح}_{١١}$

الحل

(أ) الحد الأوسط = $\text{ح}_{٧}$ ، معامل $\text{ح}_{٧} = {}^{١٢}\text{ق}_{٦}\,(٢)^{٦}\,(١)^{١٢-٦} = ٥٩١٣٦$

(ب) $\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{١٢}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{٢}{\text{س}^{٢}}\right)^{\text{ر}}\text{س}^{١٢-\text{ر}} = {}^{١٢}\text{ق}_{\text{ر}}\,(٢)^{\text{ر}}\,\text{س}^{١٢-٣\text{ر}}$

$١٢ - ٣\text{ر} = ٠$ ∴ ر = ٤ ∴ الحد الخالى من س $= \text{ح}_{٥} = {}^{١٢}\text{ق}_{٤}\,(٢)^{٤}$

$= ٧٩٢٠$

(جـ) $\frac{\text{ح}_{١١}}{\text{ح}_{١٠}} = \frac{٨}{٤٥}$ ∴ $\frac{١٢ - ١٠ + ١}{١٠}\left(\frac{٢}{\text{س}^{٣}}\right) = \frac{٨}{٤٥}$

$\frac{٣}{٥\text{س}^{٣}} = \frac{٨}{٤٥}$ ∴ $\text{س}^{٣} = \frac{٢٧}{٨}$ ∴ $\text{س} = \frac{٣}{٢}$

(٢) فى مفكوك $\left(\text{ا}\,\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{ب}\,\text{س}}\right)^{١١}$ حيث قوى س التنازلية

إذا كان معامل : $\text{س}^{٧}$ = معامل $\text{س}^{٤}$ ، أثبت أن : ا ب = ١

الحل

$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{١١}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{١}{\text{ب}\,\text{س}}\right)^{\text{ر}}(\text{ا}\,\text{س}^{٢})^{١١-\text{ر}} = {}^{١١}\text{ق}_{\text{ر}} \times \frac{\text{ا}^{١١-\text{ر}}}{\text{ب}^{\text{ر}}}\,(\text{س})^{٢٢-٣\text{ر}}$

$٢٢ - ٣\text{ر} = ٧$ ⟸ ∴ ر = ٥ ∴ معامل $\text{س}^{٧} = {}^{١١}\text{ق}_{٥}\frac{\text{ا}^{٦}}{\text{ب}^{٥}}$

$٢٢ - ٣\text{ر} = ٤$ ⟸ ∴ ر = ٦ ∴ معامل $\text{س}^{٤} = {}^{١١}\text{ق}_{٦}\frac{\text{ا}^{٥}}{\text{ب}^{٦}}$

${}^{١١}\text{ق}_{٥}\frac{\text{ا}^{٦}}{\text{ب}^{٥}} = {}^{١١}\text{ق}_{٦}\frac{\text{ا}^{٥}}{\text{ب}^{٦}}$ لاحظ أن : ${}^{١١}\text{ق}_{٥} = {}^{١١}\text{ق}_{٦}$

∴ $(\text{ا}\text{ب})^{٦} = (\text{ا}\text{ب})^{٥}$ ∴ ا ب = ١

(٣) إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك $\left(\text{٢أ} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{٢ن}+١}$ متساويين

وكان أ + س = $\frac{٩}{٤}$ فأوجد قيمتي أ ، س

الحل

الحدان الأوسطان هما : $\text{ح}_{\text{ن}+١}$ ، $\text{ح}_{\text{ن}+٢}$ ∵ $\text{ح}_{\text{ن}+٢} = \text{ح}_{\text{ن}+١}$

$\frac{\text{ح}_{\text{ن}+٢}}{\text{ح}_{\text{ن}+١}} = ١$ ∴ $\frac{(\text{٢ن}+١)-(\text{ن}+١)+١}{\text{ن}+١}\left(\frac{١}{\text{٢أس}}\right) = ١$

∴ ٢أس = ١ .... (١) ، ∵ أ + س = $\frac{٩}{٤}$ ∴ أ = $\frac{٩}{٤}$ − س ...... (٢)

بالتعويض في (١) ∴ ٢س($\frac{٩}{٤}$ − س) = ١ ⟸ ٤س^{٢} − ٩س + ٢ = ٠

(٤س − ١)(س − ٢) = ٠ ومنها س = $\frac{١}{٤}$ أو س = ٢

من (٢) أ = ٢ | أ = $\frac{١}{٤}$

(٤) في مفكوك $\left(\frac{\text{٣س}}{٢} + \frac{٢}{\text{٣س}}\right)^{١٦}$ إذا كانت النسبة بين ٣ حدود متتالية

تساوي ٤٠ : ٢٤ : ١١ ، فأوجد قيمة س ورتب هذه الحدود

الحل

نفرض أن الحدود المتتالية هي : $\text{ح}_{\text{ر}}$ ، $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ ، $\text{ح}_{\text{ر}+٢}$

$\text{ح}_{\text{ر}} : \text{ح}_{\text{ر}+١} : \text{ح}_{\text{ر}+٢} = ٤٠ : ٢٤ : ١١$

$\frac{\text{ح}_{\text{ر}+١}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \frac{٢٤}{٤٠}$ | $\frac{\text{ح}_{\text{ر}+٢}}{\text{ح}_{\text{ر}+١}} = \frac{١١}{٢٤}$

$\frac{١٦ - \text{ر} + ١}{\text{ر}} \times \frac{٤}{\text{٩س}^{٢}} = \frac{٣}{٥}$ .... (١) | $\frac{١٦ - (\text{ر}+١) + ١}{\text{ر}+١} \times \frac{٤}{\text{٩س}^{٢}} = \frac{١١}{٢٤}$ .... (٢)

بقسمة (١) ÷ (٢) : $\frac{١٧ - \text{ر}}{\text{ر}} \times \frac{\text{ر}+١}{١٦ - \text{ر}} = \frac{٣}{٥} \times \frac{٢٤}{١١}$

$\frac{١٧ + \text{١٦ر} - \text{ر}^{٢}}{\text{١٦ر} - \text{ر}^{٢}} = \frac{٧٢}{٥٥}$

∴ ٩٣٥ + ٨٨٠ر − ٥٥ر^{٢} = ١١٥٢ر − ٧٢ر^{٢} ⟸ ١٧ر^{٢} − ٢٧٢ر + ٩٣٥ = ٠

∴ ر^{٢} − ١٦ر + ٥٥ = ٠ (ر − ٥)(ر − ١١) = ٠

ر = ٥ ر = ١١

الحدود هي : $\text{ح}_{٥}$ ، $\text{ح}_{٦}$ ، $\text{ح}_{٧}$ | الحدود هي : $\text{ح}_{١١}$ ، $\text{ح}_{١٢}$ ، $\text{ح}_{١٣}$

من (١) س = $\pm\frac{٤}{٣}$ | من (١) ∴ س = $\pm\frac{٢\sqrt{١١٠}}{٣٣}$

(٥) في مفكوك $(\text{س}^{\text{م}} + \frac{1}{\text{س}^{\text{م}}})^{9}$ حيث م عدد صحيح موجب أوجد :

أولاً : قيم م التي تجعل للمفكوك حداً خاليًا من س

ثانيًا : النسبة بين الحد الخالي من س ومعامل الحد الأوسط ذلك لأكبر قيم م التي حصلت عليها أولاً .

﴿ الحـل ﴾

$\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{9}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{1}{\text{س}^{\text{م}}}\right)^{\text{ر}} (\text{س}^{\text{م}})^{9-\text{ر}}$ $\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{9}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{س}^{\text{م}(9-\text{ر})-\text{ر}}$ ...... (١)

$\therefore \text{م}(9-\text{ر}) - \text{ر} = 0$ $\therefore \text{م} = \frac{\text{ر}}{9-\text{ر}}$

$\therefore \text{ر} < 9$ $\therefore \text{ر} = 6$ وعندما $\text{م} = 2$

$\therefore \text{ر} = 8$ وعندما $\text{م} = 8$

$\therefore \text{م} = 2$ أو 8

ثانيًا : عند $\text{م} = 8$ يكون $\text{ر} = 8$ $\therefore$ الحد الخالي من س $= \text{ح}_{9}$

$\therefore$ الحد الأوسط $= \text{ح}_{5}$ $\therefore \frac{\text{ح}_{9}}{\text{ح}_{5}} = \frac{{}^{9}\text{ق}_{8}}{{}^{9}\text{ق}_{4}} = \frac{9}{126} = \frac{1}{14}$

(٦) في مفكوك $(2 + \frac{\text{س}}{3})^{9}$

(١) أوجد قيمة س التي تجعل الحدين الأوسطين متساويين .

(٢) بدون إيجاد المفكوك أوجد قيمة أكبر معامل فيه .

الحـــل

(١) الحدان الأوساط هما ح_{5} ، ح_{6}

$\therefore \frac{\text{ح}_{6}}{\text{ح}_{5}} = \frac{9-5+1}{5} \times \frac{\text{س}}{6} = 1$

$\therefore \text{س} = 6$

(٢) $\frac{\text{معامل ح}_{\text{ر}+1}}{\text{معامل ح}_{\text{ر}}} = \frac{9-\text{ر}+1}{\text{ر}} \times \frac{1}{6}$ ، $\text{ر} \in \text{ص}^{+}$

$\therefore \frac{10-\text{ر}}{6\text{ر}} > 1$ $\therefore \text{ر} = 1$

$\therefore$ أكبر معامل هو معامل ح_{2}

$= {}^{9}\text{ق}_{1} \times 2^{8} \times \frac{1}{3} = 768$

(٧) فى مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{١}{٢س}\right)^{٢ه}$ حسب قوى س التنازلية

(أولاً) أثبت أن الحد الخالى من س رتبته $(٢ه + ١)$

(ثانياً) أوجد النسبة بين الحد الخالى من س والحد الأوسط عندما :

$ه = ٤$ ، $س = ١$

الحـــــــل

$ح_{ر+١} = {}^{٢ه}ق_{ر} \left(\frac{١}{٢س}\right)^{ر} \left(س^{٢}\right)^{٢ه-ر}$

$ح_{ر+١} = {}^{٢ه}ق_{ر}\ ٢^{-ر}\ س^{٦ه-٣ر}$

$٦ه - ٣ر = ٠ \Leftarrow ر = ٢ه$

∴ الحد الخالى من س هو $ح_{٢ه+١}$

عندما $ه = ٤$ يكون الحد الخالى من س هو $ح_{٩}$ والحد الأوسط $ح_{٧}$

$\frac{ح_{٩}}{ح_{٧}} = \frac{ح_{٩}}{ح_{٨}} \times \frac{ح_{٨}}{ح_{٧}}$

$= \frac{١٢ - ٨ + ١}{٨} \times \frac{١٢ - ٧ + ١}{٧} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$

$= \frac{٥}{٨} \times \frac{٦}{٧} \times \frac{١}{٤} = \frac{١٥}{١١٢}$

(٨) إذا كانت الحدود الثانى والثالث والرابع من مفكوك $(س + ص)^{ه}$ حسب قوى س التنازلية هى على الترتيب ٢٤٠ ، ٧٢٠ ، ١٠٨٠

فما قيمة كل من س ، ص ، ه ؟

الحـــل

$\frac{ح_{٣}}{ح_{٢}} = \frac{ه - ٢ + ١}{٢} \times \frac{ص}{س} = \frac{٧٢٠}{٢٤٠}$

$\therefore (ه - ١) \times \frac{ص}{س} = ٦$ ...... (١)

$\frac{ح_{٤}}{ح_{٣}} = \frac{ه - ٣ + ١}{٣} \times \frac{ص}{س} = \frac{١٠٨٠}{٧٢٠}$

$\therefore (ه - ٢) \times \frac{ص}{س} = \frac{٩}{٢}$ ...... (٢)

بقسمة (١) ÷ (٢) $\frac{ه - ١}{ه - ٢} = \frac{١٢}{٩}$ ومنها $ه = ٥$

من (١) $\therefore ٤ \times \frac{ص}{س} = ٦$

$\therefore ص = \frac{٣}{٢} س$ .... (٣)

، $ح_{٢} = ٢٤٠$ $\therefore {}^{٥}ق_{١}\ ص\ س^{٤} = ٢٤٠$

، $٥\left(\frac{٣س}{٢}\right) س^{٤} = ٢٤٠$ ومنها $س^{٥} = ٣٢$

$\therefore س = ٢$ ، $ص = ٣$

(١١) إذا كانت : $(\text{أ} - \text{س})^{14} = \text{حـ}_0 + \text{حـ}_1\text{س} + \text{حـ}_2\text{س}^2 + \text{حـ}_3\text{س}^3 + \dots + \text{حـ}_{14}\text{س}^{14}$

وكان $4\text{حـ}_4 + 11(\text{حـ}_3 + \text{حـ}_2) = \text{صفر}$. فأوجد قيمة أ . ($\frac{1}{2}$)

الحـــل

لاحظ ان جـ١ هي معامل س ، جـ٢ هي معامل س² ، جـ٣ هي معامل س³ ، وهكذا ......

$\because \text{ح}_{ر+1} = {}^{ن}\text{ق}_{ر} (\text{الأول})^{ن-ر} (\text{الثانى})^{ر}$ $\therefore \text{ح}_{ر+1} = {}^{14}\text{ق}_{ر} (\text{أ})^{14-ر} (-\text{س})^{ر}$

$\therefore \text{ح}_{ر+1} = {}^{14}\text{ق}_{ر} (\text{أ})^{14-ر} (-1)^{ر} \times \text{س}^{ر}$

$\text{جـ}_2 = {}^{14}\text{ق}_2\, \text{أ}^{12} (-1)^2 = 91\,\text{أ}^{12}$

$\text{جـ}_3 = {}^{14}\text{ق}_3\, \text{أ}^{11} (-1)^3 = -364\,\text{أ}^{11}$

$\text{جـ}_4 = {}^{14}\text{ق}_4\, \text{أ}^{10} (-1)^4 = 1001\,\text{أ}^{10}$

$\because 4\,\text{جـ}_4 + 11\,\text{جـ}_3 + 11\,\text{جـ}_2 = 0$

$\therefore 4004\,\text{أ}^{10} - 4004\,\text{أ}^{11} + 1001\,\text{أ}^{12} = 0$ $\therefore 1001\,\text{أ}^{10} (4 - 4\text{أ} + \text{أ}^2) = 0$

ومنها $\text{أ} = 0$ مرفوضة ، $(\text{أ} - 2)^2 = 0$ $\therefore \text{أ} = 2$

(١٢) إذا كان فى مفكوك $\left(\text{س}^2 + \frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{هـ}}$ حداً خاليًا من س فأثبت أن هـ يجب أن تكون مضاعفًا للعدد ٣ ثم أوجد الحد الخالى من س فى هذا المفكوك عندما هـ = ١٢

الحـل

$\text{ح}_{ر+1} = {}^{\text{هـ}}\text{ق}_{ر} \left(\frac{1}{\text{س}}\right)^{ر} (\text{س}^2)^{\text{هـ}-ر}$

$= {}^{\text{هـ}}\text{ق}_{ر}\, \text{س}^{2\text{هـ}-3ر}$

والحد الخالى يكون $2\text{هـ} - 3ر = 0$

$\therefore ر = \frac{2\text{هـ}}{3}$

$ر \in \text{ص}^{+} \Leftarrow$ هـ مضاعفًا للعدد ٣

عندما هـ = ١٢ فإن ر = ٨

$\therefore$ الحد الخالى هو $\text{ح}_9 = {}^{12}\text{ق}_8 = {}^{12}\text{ق}_4 = 495$

(١٣) في مفكوك $\left(\text{س}^{2}+\frac{1}{\text{س}}\right)^{3\text{ن}}$

أولاً : أثبت أن الحد الخالي من س يساوي معامل الحد الذي يحتوي على $\text{س}^{3\text{ن}}$.

ثانياً : إذا كانت ن = ٦ فأوجد نسبة الحد الخالي من س إلى معامل الحد الأوسط .

(٢١ : ٥٥)

الحل

$\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,(\text{الأول})^{\text{ن}-\text{ر}}\,(\text{الثاني})^{\text{ر}}$

$\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{3\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,(\text{س}^{2})^{3\text{ن}-\text{ر}}\left(\frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{ر}} = {}^{3\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{س}^{6\text{ن}-3\text{ر}}$

بوضع ٦ن − ٣ر = ٠ ∴ ر = ٢ن

∴ الحد الخالي من س = $^{3\text{ن}}\text{ق}_{2\text{ن}}$ بوضع ٦ن − ٣ر = ٣ن ∴ ر = ن

معامل $\text{س}^{3\text{ن}}$ = $^{3\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}$ = $^{3\text{ن}}\text{ق}_{2\text{ن}}$ = معامل الحد الخالي من س

عند ن = ٦ يكون عدد الحدود = ٣ × ٦ + ١ = ١٩ حداً والحد الخالي من س = $^{18}\text{ق}_{12}$

ورتبة الحد الأوسط = (١٩ + ١) ÷ ٢ = ١٠ ∴ الحد الأوسط هو ح_{10} ومعامله = $^{18}\text{ق}_{9}$

∴ $^{18}\text{ق}_{12}$: $^{18}\text{ق}_{9}$ = ٢١ : ٥٥

(١٤) في مفكوك $(1+\text{س})^{\text{ن}}$ إذا كان ضعف معامل ح_6 = معامل ح_5 + معامل ح_7

فأوجد قيمة ن وأثبت أن هناك علاقتين أخريين تفي بالشروط السابقة .

الحل

∵ ٢ × معامل ح_6 = معامل ح_5 + معامل ح_7

بالقسمة على معامل ح_6

$$\therefore\ 2 = \frac{\text{معامل ح}_5}{\text{معامل ح}_6} + \frac{\text{معامل ح}_7}{\text{معامل ح}_6} \quad \ldots (1)$$

$$\because\ \frac{\text{معامل ح}_{\text{ر}+1}}{\text{معامل ح}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+1}{\text{ر}} \times \frac{\text{معامل الثاني}}{\text{معامل الأول}}$$

$$\therefore\ \frac{\text{معامل ح}_6}{\text{معامل ح}_5} = \frac{\text{ن}-5+1}{5} \times \frac{1}{1} = \frac{\text{ن}-4}{5} \quad \therefore\ \frac{\text{معامل ح}_5}{\text{معامل ح}_6} = \frac{5}{\text{ن}-4} \quad \ldots (2)$$

، $\frac{\text{معامل ح}_٧}{\text{معامل ح}_٦} = \frac{ن - ٦ + ١}{٦} \times \frac{١}{١} = \frac{ن - ٥}{٦}$ ....(٣)

وبالتعويض من (٢) ، (٣) فى (١)

∴ $٢ = \frac{٥}{ن - ٤} + \frac{ن - ٥}{٦}$ وبضرب الطرفين فى ٦ (ن - ٤)

∴ ١٢ (ن - ٤) = ٣٠ + (ن - ٥) (ن - ٤)

∴ ١٢ ن - ٤٨ = ٣٠ + $ن^٢$ - ٩ ن + ٢٠ ∴ $ن^٢$ - ٢١ ن + ٩٨ = ٠

∴ (ن - ٧) (ن - ١٤) = ٠ ∴ ن = ٧ أ ن = ١٤

وعندما ن = ٧

يكون معامل $ح_٥$ = $^٧ق_٤$ = $^٧ق_٣$ = معامل $ح_٤$

، معامل $ح_٦$ = $^٧ق_٥$ = $^٧ق_٢$ = معامل $ح_٣$

، معامل $ح_٧$ = $^٧ق_٦$ = $^٧ق_١$ = معامل $ح_٢$

∴ معاملات الحدود الرابع والثالث والثانى تكوّن العلاقة :

٢ معامل $ح_٣$ = معامل $ح_٤$ + معامل $ح_٢$.

وعندما ن = ١٤

يكون معامل $ح_٥$ = $^{١٤}ق_٤$ = $^{١٤}ق_{١٠}$ = معامل $ح_{١١}$

، معامل $ح_٦$ = $^{١٤}ق_٥$ = $^{١٤}ق_٩$ = معامل $ح_{١٠}$

، معامل $ح_٧$ = $^{١٤}ق_٦$ = $^{١٤}ق_٨$ = معامل $ح_٩$

∴ معاملات الحدود الحادى عشر والعاشر والتاسع تكوّن العلاقة

٢ معامل $_{١٠}$ = معامل $ح_{١١}$ + معامل $ح_٩$.

فكر (١) أوجد معامل $س^٤$ فى مفكوك $(١ + س + س^٢)^{١٠}$ (الجواب ٦١٥)

(٢) فى مفكوك $\left(\sqrt{٣}\, س + \sqrt[٣]{٢}\, \frac{١}{س}\right)^{١٠}$

أوجد رتبة الحد الخالي من س ثم أوجد رتب الحدود التي معاملاتها

اعداد صحيحة ومجموع هذه المعاملات (ح ، ح ، ح ، ح ، ٧٨٠٣)

الأعداد المركبة

أولاً : أكمـــــــل :

(١) إذا كان ع = ٣ − ٤ ت فإن |ع| = ……… ، جتا θ = ……… ، جا θ = ………

(٢) إذا كان ع = √٣ − ت فإن مقياس العدد ع = ……… وسعته الأساسية هي ………

(٣) إذا كان ع = −١ − √٣ ت فإن |ع| = ……… وسعته الأساسية هي ………

(٤) إذا كان (٢ − ٣ت) هي أحد جذري معادلة من الدرجة الثانية معاملاتها أعداد حقيقية فإن المعادلة هي ………

(٥) الجذور التكعيبية للعدد ٨ هي ……… ، ……… ، ………

(٦) ١ + ^ن ق١ ت + ^ن ق٢ ت² + ^ن ق٣ ت³ + ……… + ^ن قن تن = ………

(٧) إذا كانت س = ١ + ت^٧ + ت^٧٧ + ت^٧٧٧ فإن قيم س هي ………

(٨) إذا كان ع = −٣ (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠) فإن العدد ع على الصورة الأسية = ………

(٩) إذا كانت ع = ٤ (جتا ٣٠ − ت جا ٣٠) فإن العدد ع على الصورة الأسية = ………

(١٠) إذا كانت ع = ٦ (− جتا ٤٥ + ت جتا ٤٥) فإن العدد ع على الصورة الأسية = ………

(١١) إذا كانت ع = ٨ (جا ٣٠ + ت جتا ٣٠) فإن العدد ع على الصورة الأسية = ………

(١٢) إذا كانت ع = ٥ (جا ٣٠ − ت جتا ٣٠) فإن العدد ع على الصورة الأسية = ………

(١٣) إذا كانت ع = −٢ (جا ٣٠ + ت جتا ٣٠) فإن العدد ع على الصورة الأسية = ………

(١٤) إذا كان ع عدد مركب حيث ٢٧٠ < سعته < ٣٦٠ وكان ع + ع̄ = ٨ ، ع · ع̄ = ٢٥

فإن ع = ………

(١٥) إذا كان ٣ ، ٢ − ت جذران لمعادلة من الدرجة الثالثة معاملاتها أعداد حقيقية فإن الجذر الثالث لهذه المعادلة هو ……… والمعادلة هي ………

(١٦) إذا كان ع = ٤ هـ^(ط ت) فإن الصورة الجبرية للعدد ع هي ………

(١٧) |٣ − ٤ ت| = ……… ومجموع الجذرين التربيعيين للعدد (٣ − ٤ ت) = ………

(١٨) ١ + ت + ت² + ت³ + ت⁴ + ……… + ت^١٠٠ = ………

(١٩) ١ + ω^٣٢ + ω^٦٤ = ……… (٢٠) (ω − ω²)⁴ = ………

(٢١) ١ + ^ن ق١ ω + ^ن ق٢ ω² + ^ن ق٣ ω³ + ……… + ^ن قن ωن = ………

(٢٢) أبسط صورة للمقدار ω + ω² + ω³ + ……… + ω^١٠٠ = ………

(٢٣) إذا كانت ع = ١ + جتا ٢θ + ت جا ٢θ فإن |ع| = ………

(٢٤) إذا كانت ع = √٢ (جتا ٢٠ + ت جا ٢٠) فإن الصورة الجبرية للعدد ع^٩ هي ………

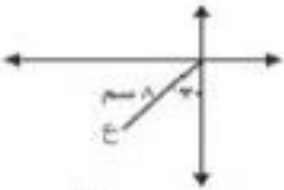
الأعداد المركبة

(٢٥) مجموعة حل المعادلة س = ١ + $\omega^{ن}$ + $\omega^{٢ن}$ حيث ن عدد صحيح هي ------------

(٢٦) معادلة الدرجة الثانية التي جذراها (١ + ω − ω^2)^2 ، (١ − ω + ω^2)^2 هي ---------

(٢٧) إذا كانت ع = ١ − جتا ٦٠ − ت جا ٣٠ فإن |ع| = ------------ ، سعة ع = ---------

(٢٨) الشكل الموضح :

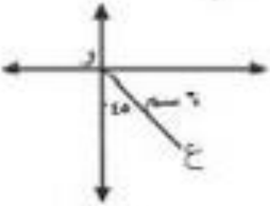


يمثل الشكل البياني للعدد المركب ع

فإن الصورة الأسية للعدد ع = ------------

والصورة الجبرية للعدد ع = ------------

(٢٩) الشكل الموضح :

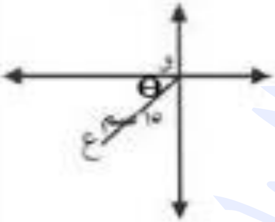


يمثل الشكل البياني للعدد المركب ع

فإن الصورة الأسية للعدد ع = ------------

والصورة الجبرية للعدد ع = ------------

(٣٠) الشكل الموضح :



يمثل الشكل البياني للعدد المركب ع حيث ظا θ = $\frac{3}{4}$

فإن الصورة الجبرية للعدد ع = ----------

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

اجابة التمارين الموضعية :

(١) ٥ ، [illegible] ، $-\frac{١}{٥}$

(٢) ٢ ، ٣٣٠

(٣) ٢ ، ٢٤٠

(٤) $س^٢ - ٤س + ١٥ = ٠$

(٥) $٢ ، ٢\omega ، ٢\omega^٢$

(٦) $(١+ت)^٨ = ٢٥٦$

(٧) ٤ ، صفر

(٨) $٣ هـ^{\frac{١}{٤} ط ت}$

(٩) $٤ هـ^{\frac{١١}{٦} ط ت}$

(١٠) $٦ هـ^{\frac{٣}{٤} ط ت}$

(١١) $٤ هـ^{\frac{١}{٢} ط ت}$

(١٢) $٥ هـ^{\frac{٥}{٦} ط ت}$

(١٣) $٢ هـ^{\frac{١}{٣} ط ت}$

(١٤) ٤ − ٣ ت

(١٥) ٢ + ت ، $س^٣ - ٧س^٢ - ٧س$

(١٦) −٤

(١٧) ٥ ، صفر

(١٨) ١

(١٩) صفر

(٢٠) ٨١

(٢١) ١

(٢٢) ω

(٢٣) ٢ جتا θ

(٢٤) −٨

(٢٥) {صفر ، ٣}

(٢٦) $س^٢ + ١٦س + ٦٤ = ٠$

(٢٧) $|ع| = \frac{١}{٢}\sqrt{٢}$ ، ٣١٥°

(٢٨) $٨ هـ^{\frac{٤}{٣} ط ت}$ ، $-٤ - ٤\sqrt{٣}$ ت

(٢٩) $٦ هـ^{\frac{٧}{٤} ط ت}$ ، $٣\sqrt{٢} - ٣\sqrt{٢}$ ت

(٣٠) −١٢ − ٩ت

ثانيـــــــا:

(١) إذا كان $أ = \frac{1-2ت}{1-3ت}$ ، $ب = \frac{2-ت}{3-ت}$ فأثبت أن أ ، ب عددان مترافقان ثم أوجد قيمة : $25(أ^2+ب^2) - 48أب$.

الحــل

$$أ = \frac{1-2ت}{1-3ت} = \frac{(1-2ت)(1+3ت)}{(1-3ت)(1+3ت)} = \frac{1+ت+6}{1+9} = \frac{7+ت}{10} = \frac{7}{10} + \frac{1}{10}ت$$

$$، ب = \frac{2-ت}{3-ت} = \frac{(2-ت)(3+ت)}{(3-ت)(3+ت)} = \frac{6-ت+1}{9+1} = \frac{7-ت}{10} = \frac{7}{10} - \frac{1}{10}ت$$

∴ أ ، ب مترافقان (لاحظ إختلاف إشارتي الجزئين التخيليين من أ ، ب)

$$أ+ب = \left(\frac{7}{10} + \frac{1}{10}ت\right) + \left(\frac{7}{10} - \frac{1}{10}ت\right) = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

$$، أب = \left(\frac{7}{10} + \frac{1}{10}ت\right)\left(\frac{7}{10} - \frac{1}{10}ت\right) = \frac{49}{100} + \frac{1}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

• وحيث أن $أ^2 + ب^2 = (أ+ب)^2 - 2أب$

$$∴ أ^2 + ب^2 = \left(\frac{7}{5}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2} = \frac{49}{25} - 1 = \frac{24}{25}$$

$$∴ 25(أ^2+ب^2) - 48أب = \frac{25 \times 24}{25} - 48 \times \frac{1}{2} = 24 - 24 = صفر$$

(٢) إذا كانت ع ∈ ك وكان $ع^2 - \overline{ع} = صفر$ فأوجد قيمة ع وأثبت أن هناك قيمتان لـ ع مترافقتان .

الحــل

نفرض أن $ع = س + ت ص$ ∴ $\overline{ع} = س - ت ص$

$$∴ (س + ت ص)^2 - (س - ت ص) = 0$$

$$∴ س^2 - ص^2 + 2 س ص ت = س - ت ص$$

وبمساواة الجزء الحقيقي بالحقيقي والتخيلي بالتخيلي

$∴ س^2 - ص^2 = س$ ... (١)

، $2 س ص = - ص$ ... (٢)

وعند [ص = ٠] وبالتعويض فى (١) ∴ س² = س ∴ س = ٠ أو س = ١

وعند [س = $\frac{-١}{٢}$] وبالتعويض فى (١) ∴ $\frac{١}{٤}$ − ص² = $-\frac{١}{٢}$

∴ ص² = $\frac{٣}{٤}$ ∴ ص = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ ع تساوى صفر ، ١ ، $-\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $-\frac{١}{٢}$ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

وواضح أن القيمتين

$-\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $-\frac{١}{٢}$ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت مترافقتان .

(٣) إذا كانت $\frac{\text{س} + ٢ + \text{ص ت}}{\text{س} - ١ - \text{ص ت}} = \frac{١ + ٤\text{ت}}{١ - \text{ت}}$ فأوجد قيم س ، ص الحقيقية .

الحل

الطرف الأيسر = $\frac{١ + ٤\text{ت}}{-١ + \text{ت}} \times \frac{-١ - \text{ت}}{-١ - \text{ت}} = \frac{-١ - ٥\text{ت} - ٤\text{ت}^٢}{١ - \text{ت}^٢}$

$= \frac{-١ - ٥\text{ت} + ٤}{١ + ١}$

∴ الطرف الأيسر = $\frac{٣ - ٥\text{ت}}{٢}$ ∴ $\frac{\text{س} + ٢ + \text{ص ت}}{\text{س} - ١ - \text{ص ت}} = \frac{٣ - ٥\text{ت}}{٢}$

∴ ٢ (س + ٢ + ص ت) = (٣ − ٥ ت) (س − ١ − ص ت)

∴ ٢ س + ٤ + ٢ ص ت

= ٣ س − ٣ − ٣ ص ت − ٥ س ت + ٥ ت + ٥ ص ت²

∴ ٢ س + ٤ + ٢ ص ت

= ٣ س − ٣ − ٣ ص ت − ٥ س ت + ٥ ت − ٥ ص

∴ (٢ س + ٤) + ٢ ص ت = (٣ س − ٣ − ٥ ص) + ت (٥ − ٥ س − ٣ ص)

وبمساواة الجزء الحقيقى بالحقيقى والتخيلى بالتخيلى

∴ ٢ س + ٤ − ٣ س − ٣ − ٥ ص ⟸ س − ٥ ص = ٧ ... (١)

، ٢ ص = ٥ − ٥ س − ٣ ص أى ٥ س + ٥ ص = ٥

∴ س + ص = ١ ... (٢)

ويطرح (٢) من (١)   ∴ −٦ ص = ٦   ∴ ص = −١

وبالتعويض في (٢)   ∴ س = ٢

(٤) أوجد الصورة الجبرية وكذا المثلثية للعدد ع = $\frac{\text{٥} + \sqrt{\text{٣}}\,\text{ت}}{\sqrt{\text{٣}} + \text{٢ت}}$

الحل

∴ ع = $\frac{\text{٥} + \sqrt{\text{٣}}\,\text{ت}}{\sqrt{\text{٣}} + \text{٢ت}}$ وبالضرب في مرافق المقام .

∴ ع = $\frac{(\text{٥} + \sqrt{\text{٣}}\,\text{ت})(\sqrt{\text{٣}} - \text{٢ت})}{(\sqrt{\text{٣}} + \text{٢ت})(\sqrt{\text{٣}} - \text{٢ت})}$

∴ ع = $\frac{\text{٥}\sqrt{\text{٣}} - \text{١٠ت} + \text{٣ت} + \text{٢}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٣} + \text{٤}} = \frac{\text{٧}\sqrt{\text{٣}} - \text{٧ت}}{\text{٧}}$

∴ ع = $\frac{\text{٧}(\sqrt{\text{٣}} - \text{ت})}{\text{٧}}$ ∴ ع = $\sqrt{\text{٣}}$ − ت وهذه هي الصورة الجبرية

∴ س = $\sqrt{\text{٣}}$ ، ص = −١

∴ ر = |ع| = $\sqrt{\text{٣} + \text{١}}$ = ٢ ، جتا θ = $\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$ ، جا θ = $-\frac{\text{١}}{\text{٢}}$

∴ θ تقع في الربع الرابع وتساوي ٣٦٠° − ٣٠° = ٣٣٠° = $\frac{\text{١١ط}}{\text{٦}}$

∴ ع = ٢ (جتا $\frac{\text{١١ط}}{\text{٦}}$ + ت جا $\frac{\text{١١ط}}{\text{٦}}$)   وهذه هي الصورة المثلثية .

(٥) ضع كلاً من العددين $\sqrt{\text{٢}}$ ت ، ١ + ت على الصورة المثلثية ثم أوجد $\left(\frac{\sqrt{\text{٢}}\,\text{ت}}{\text{١} + \text{ت}}\right)^{\text{٨}}$.

الحل

$\sqrt{\text{٢}}$ ت = $\sqrt{\text{٢}}$ (جتا $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ + ت جا $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$)   راجع ملحوظة (١) صفحة ١٤٠

١ + ت = $\sqrt{\text{٢}}$ (جتا $\frac{\text{ط}}{\text{٤}}$ + ت جا $\frac{\text{ط}}{\text{٤}}$) راجع مثال محلول (٢٥) صفحة ١٥٣

∴ $\frac{\sqrt{\text{٢}}\,\text{ت}}{\text{١} + \text{ت}} = \frac{\sqrt{\text{٢}}(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{\text{٢}} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{\text{٢}})}{\sqrt{\text{٢}}(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{\text{٤}} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{\text{٤}})}$

= ١ (جتا ($\frac{\text{ط}}{\text{٢}} - \frac{\text{ط}}{\text{٤}}$) + ت جا ($\frac{\text{ط}}{\text{٢}} - \frac{\text{ط}}{\text{٤}}$))

$\because \frac{\sqrt{2}\,ت}{1+ت} = \text{جتا}\frac{ط}{4} + ت\,\text{جا}\frac{ط}{4}$

$\therefore \left(\frac{\sqrt{2}\,ت}{1+ت}\right)^8 = \left(\text{جتا}\frac{ط}{4} + ت\,\text{جا}\frac{ط}{4}\right)^8$

$\therefore \left(\frac{\sqrt{2}\,ت}{1+ت}\right)^8 = \left(\text{جتا}\,8 \times \frac{ط}{4} + ت\,\text{جا}\,8 \times \frac{ط}{4}\right)$

$\therefore \left(\frac{\sqrt{2}\,ت}{1+ت}\right)^8 = \text{جتا}\,2ط + ت\,\text{جا}\,2ط = 1 + ت \times 0 = 1$

(٦) إذا كان $ع_1 = 15\,(\text{جتا}\,\theta - ت\,\text{جا}\,\theta)$ ،

$ع_2 = 65\,(\text{جا}\,2\theta + ت\,\text{جتا}\,2\theta)$ حيث $\theta \in \left]\frac{ط}{2} ، ط\right[$

، $\text{جتا}\,\theta = -\frac{12}{13}$ فأوجد الصورة الجبرية لخارج القسمة $ع_2 \div ع_1$

الحل

$ع_1 = 15\,(\text{جتا}\,\theta - ت\,\text{جا}\,\theta)$

$\therefore ع_1 = 15\,(\text{جتا}\,(2ط - \theta) + ت\,\text{جا}\,(2ط - \theta))$

، $ع_2 = 65\,(\text{جا}\,2\theta + ت\,\text{جتا}\,2\theta)$

$\therefore ع_2 = 65\,\left(\text{جتا}\left(\frac{ط}{2} - 2\theta\right) + ت\,\text{جا}\left(\frac{ط}{2} - 2\theta\right)\right)$

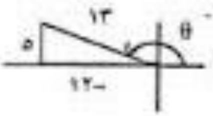
$\therefore \frac{ع_2}{ع_1} = \frac{65}{15}\,\left(\text{جتا}\left(\frac{ط}{2} - 2\theta - 2ط + \theta\right)\right.$

$\left.+ ت\,\text{جا}\left(\frac{ط}{2} - 2\theta - 2ط + \theta\right)\right)$

$= \frac{13}{3}\,\left(\text{جتا} - \left(\frac{3ط}{2} + \theta\right) + ت\,\text{جا} - \left(\frac{3ط}{2} + \theta\right)\right)$

$= \frac{13}{3}\,\left(\text{جتا}\left(\frac{3ط}{2} + \theta\right) - ت\,\text{جا}\left(\frac{3ط}{2} + \theta\right)\right)$

$= \frac{13}{3}\,(\text{جا}\,\theta + ت\,\text{جتا}\,\theta)$



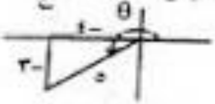
$= \frac{13}{3}\left(\frac{5}{13} - \frac{12}{13}\,ت\right) = \frac{5}{3} - 4\,ت$

(٧)

إذا كان ع = ٢ (حتا θ + ت حا θ) حيث θ ∈] ط ، $\frac{٣}{٢}$ ط [

، طا θ = $\frac{٣}{٤}$ فأوجد الصورة المثلثية والصورة الجبرية لكل من $\frac{١}{ع}$ ، $ع^{-٢}$ ، $\frac{١}{\bar{ع}}$

الحل



∵ ع = ٢ (حتا θ + ت حا θ)

∴ $\frac{١}{ع} = \frac{١}{٢}$ (حتا (− θ) + ت حا (− θ)) (الصورة المثلثية)

= $\frac{١}{٢}$ (حتا θ − ت حا θ)

= $\frac{١}{٢}$ (− $\frac{٤}{٥}$ + $\frac{٣}{٥}$ ت) ∴ $\frac{١}{ع}$ = − $\frac{٢}{٥}$ + $\frac{٣}{١٠}$ ت (الصورة الجبرية)

∵ $ع^{٢}$ = ٤ (حتا θ + ت حا θ $)^{٢}$

∴ $ع^{٢}$ = ٤ (حتا ٢ θ + ت حا ٢ θ)

∴ $\frac{١}{ع^{٢}} = \frac{١}{٤}$ (حتا (−٢ θ) + ت حا (− ٢ θ)) (الصورة المثلثية)

= $\frac{١}{٤}$ (حتا ٢ θ − ت حا ٢ θ)

= $\frac{١}{٤}$ (٢ $حتا^{٢}$ θ − ١ − ت × ٢ حا θ حتا θ)

= $\frac{١}{٤}$ ($\frac{٣٢}{٢٥}$ − ١ − ت × ٢ × $\frac{-٣}{٥}$ × $\frac{-٤}{٥}$)

= $\frac{١}{٤}$ ($\frac{٧}{٢٥}$ $\frac{٢٤}{٢٥}$ ت) ∴ $ع^{-٢}$ − $\frac{٧}{١٠٠}$ $\frac{٦}{٢٥}$ ت (الصورة الجبرية)

، ∵ $\bar{ع}$ = ٢ (حتا (− θ) + ت حا (− θ))

∴ $\frac{١}{\bar{ع}} = \frac{١}{٢}$ (حتا − (− θ) + ت حا − (− θ))

= $\frac{١}{٢}$ (حتا θ + ت حا θ) (الصورة المثلثية)

= $\frac{١}{٢}$ (− $\frac{٤}{٥}$ − $\frac{٣}{٥}$ ت) ∴ $\frac{١}{\bar{ع}}$ = − $\frac{٢}{٥}$ − $\frac{٣}{١٠}$ ت (الصورة الجبرية)

(٨) أوجد الصورة المثلثية لقيم المقدار $(\sqrt{٣} + \text{ت})^{\frac{٢}{٥}}$

الحـــل

نوجد الصورة المثلثية للمقدار : $\sqrt{٣} + \text{ت}$

$\text{ل} = \sqrt{٣ + ١} = ٢$ ، $\text{حا}\,\theta = \frac{١}{٢}$ ، $\text{حتا}\,\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ $\theta = \frac{١}{٦}\,\text{ط}$

∴ $\sqrt{٣} + \text{ت} = ٢\,(\text{حتا}\,\frac{١}{٦}\,\text{ط} + \text{ت}\,\text{حا}\,\frac{١}{٦}\,\text{ط})$

∴ $(\sqrt{٣} + \text{ت})^{٢} = ٤\,(\text{حتا}\,\frac{١}{٣}\,\text{ط} + \text{ت}\,\text{حا}\,\frac{١}{٣}\,\text{ط})$

∴ $(\sqrt{٣} + \text{ت})^{\frac{٢}{٥}} = \sqrt[٥]{٤}\,\left(\text{حتا}\,\frac{\frac{١}{٣}\,\text{ط} + ٢\,\text{م}\,\text{ط}}{٥} + \text{ت}\,\text{حا}\,\frac{\frac{١}{٣}\,\text{ط} + ٢\,\text{م}\,\text{ط}}{٥}\right)$

حيث : م = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

∴ قيم المقدار $(\sqrt{٣} + \text{ت})^{\frac{٢}{٥}}$ هى : $\sqrt[٥]{٤}\,(\text{حتا}\,\frac{١}{١٥}\,\text{ط} + \text{ت}\,\text{حا}\,\frac{١}{١٥}\,\text{ط})$

، $\sqrt[٥]{٤}\,(\text{حتا}\,\frac{٧}{١٥}\,\text{ط} + \text{ت}\,\text{حا}\,\frac{٧}{١٥}\,\text{ط})$ ، $\sqrt[٥]{٤}\,(\text{حتا}\,\frac{١٣}{١٥}\,\text{ط} + \text{ت}\,\text{حا}\,\frac{١٣}{١٥}\,\text{ط})$

، $\sqrt[٥]{٤}\,(\text{حتا}\,\frac{١٩}{١٥}\,\text{ط} + \text{ت}\,\text{حا}\,\frac{١٩}{١٥}\,\text{ط})$ ، $\sqrt[٥]{٤}\,(\text{حتا}\,\frac{٥}{٣}\,\text{ط} + \text{ت}\,\text{حا}\,\frac{٥}{٣}\,\text{ط})$

و ذلك بوضع : م = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ على الترتيب

(٩) إذا كانت $\text{ع} = ١ - \sqrt{٣}\,\text{ت}$ ضع العدد ع على الصورة الأسية (صورة أويلر)

الحـل

∵ $\text{ع} = ١ - \sqrt{٣}\,\text{ت}$ ∴ $\text{س} = ١$ ، $\text{ص} = -\sqrt{٣}$

∴ $\text{ل} = |\text{ع}| = \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}} = \sqrt{١ + ٣} = \sqrt{٤} = ٢$

، $\text{حتا}\,\theta = \frac{\text{س}}{\text{ل}} = \frac{١}{٢}$ ، $\text{حا}\,\theta = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ θ تقع فى الربع الرابع

∴ $\theta = ٣٦٠^{\circ} - ٦٠^{\circ} = ٣٠٠^{\circ} = \frac{٣٠٠}{١٨٠} \times \text{ط} = \frac{٥}{٣}\,\text{ط}$

، ∵ $\text{ع} = \text{ل}\,\text{هـ}^{\theta\,\text{ت}}$ ∴ $\text{ع} = ٢\,\text{هـ}^{\frac{٥}{٣}\,\text{ط}\,\text{ت}}$

الأعداد المركبة

(١٠) إذا كانت $ع_١ = \sqrt{٣} - ت$ ، $ع_٢ = ١ - ت$ ضع العددين $ع_١$ ، $ع_٢$ على الصورة المثلثية و الأسية ومن ذلك

(أ) ضع العدد $ع = \frac{ع_١}{ع_٢}$ على الصورة المثلثية

(ب) استخدم النتيجة السابقة في حساب جتا $\frac{١}{١٢}$ ط ، جتا $\frac{١}{١٢}$ ط

(جـ) أوجد $\sqrt[٣]{ع_١}$ ، $\sqrt{ع_٢}$

الحــــــــل

$\because ع_١ = \sqrt{٣} - ت$ $\therefore ل = ٢$ ، $\theta = ٣٣٠$

$\therefore ع_١ = ٢ (جتا ٣٣٠ + ت جا ٣٣٠) = ٢ هـ^{\frac{١١}{٦}ط ت}$

$\because ع_٢ = ١ - ت$ $\therefore ل = \sqrt{٢}$ ، $\theta = ٣١٥$

$\therefore ع_٢ = \sqrt{٢} (جتا ٣١٥ + ت جا ٣١٥) = \sqrt{٢} هـ^{\frac{٧}{٤}ط ت}$

(أ) $ع = \frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{٢ (جتا ٣٣٠ + ت جا ٣٣٠)}{\sqrt{٢} (جتا ٣١٥ + ت جا ٣١٥)}$

$ع = \sqrt{٢} (جتا ١٥ + ت جا ١٥)$ ....(١)

(ب) $\because ع = \frac{\sqrt{٣} - ت}{١ - ت} \times \frac{١ + ت}{١ + ت} = \frac{(\sqrt{٣} + ١) + (\sqrt{٣} - ١) ت}{٢}$

$\therefore ع = \frac{\sqrt{٣} + ١}{٢} + \frac{\sqrt{٣} - ١}{٢}$ ت ....(٢)

من (١) ، (٢)

$\sqrt{٢}$ جتا ١٥ $= \frac{\sqrt{٣} + ١}{٢}$ ومنها جتا $\frac{١}{١٢}$ ط $= \frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤}$

$\sqrt{٢}$ جا ١٥ $= \frac{\sqrt{٣} - ١}{٢}$ ومنها جا $\frac{١}{١٢}$ ط $= \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤}$

(جـ) $\sqrt[٣]{ع_١} = \sqrt[٣]{٢} (جتا ٣٣٠ + ت جا ٣٣٠)^{\frac{١}{٣}}$

$\therefore \sqrt[3]{ع} = \sqrt[3]{2}$ (جتا $\frac{330 + 2ط ر}{3}$ + ت جا $\frac{330 + 2ط ر}{3}$)

عندما ر = ٠ فإن $\sqrt[3]{ع} = \sqrt[3]{2}$ (جتا ١١٠ + ت جا ١١٠)

عندما ر = ١ فإن $\sqrt[3]{ع} = \sqrt[3]{2}$ (جتا ٢٣٠ + ت جا ٢٣٠)

عندما ر = ٢ فإن $\sqrt[3]{ع} = \sqrt[3]{2}$ (جتا ٣٥٠ + ت جا ٣٥٠)

$\sqrt{ع} = \sqrt{2}$ (جتا $\frac{315 + 2ط ر}{2}$ + ت جا $\frac{315 + 2ط ر}{2}$)

عندما ر = ٠ فإن $\sqrt{ع} = \sqrt{2}$ (جتا ١٥٧,٥ + ت جا ١٥٧,٥)

عندما ر = ١ فإن $\sqrt{ع} = \sqrt{2}$ (جتا ٣٣٧,٥ + ت جا ٣٣٧,٥)

(١١) أوجد الجذور التكعيبية للعدد المركب ع = ٤(١ − $\sqrt{3}$ ت)
في الصورتين المثلثية والأسية

الحل

يجب كتابة العدد ع على الصورة المثلثية أولاً : ع = ٤ − ٤$\sqrt{3}$ ت

س = ٤ ، ص = −٤$\sqrt{3}$ $\therefore$ ل = $\sqrt{16 + 48}$ = ٨

جا θ = $\frac{4}{8}$ = $\frac{1}{2}$ $\therefore$ قياس الزاوية الحادة = ٦٠°

$\because$ θ = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠° (الربع الرابع حيث س موجبة ، ص سالبة)

$\therefore$ ع = ٨(جتا٣٠٠° + ت جا٣٠٠°) = ٨(جتا $\frac{5ط}{3}$ + ت جا $\frac{5ط}{3}$)

$ع^{\frac{1}{3}}$ = $\sqrt[3]{8}$ (جتا $\frac{300° + 2ر ط}{3}$ ، ت جا $\frac{300° + 2ر ط}{3}$) حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢

عند ر = ٠ ← $\therefore$ الجذر الأول = ٢(جتا١٠٠° + ت جا١٠٠°) = ٢ هـ$^{\frac{5ط}{9}ت}$

عند ر = ١ ← $\therefore$ الجذر الثانى = ٢(جتا٢٢٠° + ت جا٢٢٠°) = ٢ هـ$^{\frac{11ط}{9}ت}$

عند ر = ٢ ← $\therefore$ الجذر الثالث = ٢(جتا٣٤٠° + ت جا٣٤٠°) = ٢ هـ$^{\frac{17ط}{9}ت}$

الأعداد المركبة

(١٢) إذا كانت : $\text{ع}_1 = \text{حتا}\ \frac{\text{٧ط}}{\text{٤}} - \text{ت حا}\ \frac{\text{٧ط}}{\text{٤}}$

، $\text{ع}_2 = -\text{١} + \text{ت}$ ، $\text{ع}_3 = \text{حا}\ \text{٦٠}^\circ + \text{ت حتا}\ \text{٦٠}^\circ$

أوجد العدد : $\text{ع} = \frac{\text{٢ع}_1^{\text{٤}} \times \text{ع}_2^{\text{٢}}}{\text{ع}_3^{\text{٣}}}$ على الصورة الأسية والصورة الجبرية

وأوجد جذريه التربيعيين على الصورة الأسية

◄ الحل ►

، $\text{ع}_1 = \text{حتا}\ \frac{\text{٧ط}}{\text{٤}} - \text{ت حا}\ \frac{\text{٧ط}}{\text{٤}} = \text{حتا}\ \frac{\text{ط}}{\text{٤}} + \text{ت حا}\ \frac{\text{ط}}{\text{٤}}$

$\therefore \text{ع}_1^{\text{٤}} = \text{حتا ط} + \text{ت حا ط}$

، $\text{ع}_2 = -\text{١} + \text{ت} = \sqrt{\text{٢}}\left(\text{حتا}\ \frac{\text{٣ط}}{\text{٤}} + \text{ت حا}\ \frac{\text{٣ط}}{\text{٤}}\right)$

$\therefore \text{ع}_2^{\text{٢}} = \text{٢}\left(\text{حتا}\ \frac{\text{٣ط}}{\text{٢}} + \text{ت حا}\ \frac{\text{٣ط}}{\text{٢}}\right)$

، $\text{ع}_3 = \text{حا}\ \text{٦٠}^\circ + \text{ت حتا}\ \text{٦٠}^\circ = \text{حتا}\ \text{٣٠}^\circ + \text{ت حا}\ \text{٣٠}^\circ = \text{حتا}\ \frac{\text{ط}}{\text{٦}} + \text{ت حا}\ \frac{\text{ط}}{\text{٦}}$

$\therefore \text{ع}_3^{\text{٥}} = \text{حتا}\ \frac{\text{٥ط}}{\text{٦}} + \text{ت حا}\ \frac{\text{٥ط}}{\text{٦}}$

$\therefore \text{ع} = \frac{\text{٢}(\text{حتا ط} + \text{ت حا ط}) \times \text{٢}\left(\text{حتا}\ \frac{\text{٣ط}}{\text{٢}} + \text{ت حا}\ \frac{\text{٣ط}}{\text{٢}}\right)}{\text{حتا}\ \frac{\text{٥ط}}{\text{٦}} + \text{ت حا}\ \frac{\text{٥ط}}{\text{٦}}}$

$\therefore \text{ع} = \text{٤}\left[\text{حتا}\ \frac{\text{٥ط}}{\text{٣}} + \text{ت حا}\ \frac{\text{٥ط}}{\text{٣}}\right]$ الصورة المثلثية

$\therefore \text{ع} = \text{ع} \times \text{هـ}^{\frac{\text{٥ط}}{\text{٣}}\text{ت}}$ الصورة الأسية

$\therefore \text{ع} = \text{٤}\left(\frac{\text{١}}{\text{٢}} - \text{ت}\ \frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}\right) = \text{٢} - \sqrt{\text{٣}}\ \text{ت}$ الصورة الجبرية

الجذرين التربيعية :

$\because \text{ع} = \text{٤} \times \text{هـ}^{\frac{\text{٥ط}}{\text{٣}}\text{ت}}$ $\therefore \text{ع}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}} = \text{٢}\left[\text{هـ}^{\frac{\left(\frac{\text{٥ط}}{\text{٣}} + \text{٢ط ر}\right)\text{ت}}{\text{٢}}}\right]$ حيث ر = ٠ ، ١

$\therefore$ ر = ٠ $\therefore$ الجذر الأول $= \text{٢هـ}^{\frac{\text{٥ط}}{\text{٦}}\text{ت}}$

$\therefore$ ر = ١ $\therefore$ الجذر الثاني $= \text{٢هـ}^{\frac{\text{١١ط}}{\text{٦}}\text{ت}}$

الأعداد المركبة

(١٣)
إذا كان $ع_{١}$ = ٢ (جتا ١٢٠° − ت جا ١٢٠°) ، $ع_{٢}$ = ٣ (جا ١٥٠° + ت جتا ١٥٠°)
فأوجد الصورة الأسية (صورة أويلر) لكل من :
أولاً : $ع_{١}ع_{٢}$ ثانياً : $ع_{١}^{٢}$ ثالثاً : $ع_{٢}^{٤}$

الحل

أولاً : ∵ $ع_{١}$ = ٢ (جتا ١٢٠° − ت جا ١٢٠°) ∴ $ع_{١}$ = ٢ (− جتا ٦٠° − ت جا ٦٠°)

∴ $ع_{١}$ = ٢ [جتا (١٨٠° + ٦٠°) + ت جا (١٨٠° + ٦٠°)]

∴ $ع_{١}$ = ٢ (جتا ٢٤٠° + ت جا ٢٤٠°)

∴ $ع_{١}$ = ٢ (جتا $\frac{٤}{٣}$ ط + ت جا $\frac{٤}{٣}$ ط) ......(١)

، $ع_{٢}$ = ٣ (جا ١٥٠° + ت جتا ١٥٠°) ∴ $ع_{٢}$ = ٣ (جا ٣٠° − ت جتا ٣٠°)

∴ $ع_{٢}$ = ٣ [جتا (٢٧٠° + ٣٠°) + ت جا (٢٧٠° + ٣٠°)]

∴ $ع_{٢}$ = ٣ (جتا ٣٠٠° + ت جا ٣٠٠°)

∴ $ع_{٢}$ = ٣ (جتا $\frac{٥}{٣}$ ط + ت جا $\frac{٥}{٣}$ ط) ......(٢)

من (١) ، (٢)

∴ $ع_{١}ع_{٢}$ = ٢ (جتا $\frac{٤}{٣}$ ط + ت جا $\frac{٤}{٣}$ ط) × ٣ (جتا $\frac{٥}{٣}$ ط + ت جا $\frac{٥}{٣}$ ط)

∴ $ع_{١}ع_{٢}$ = ٦ [جتا ($\frac{٤}{٣}$ ط + $\frac{٥}{٣}$ ط) + ت جا ($\frac{٤}{٣}$ ط + $\frac{٥}{٣}$ ط)]

∴ $ع_{١}ع_{٢}$ = ٦ (جتا ٣ ط + ت جا ٣ ط) ∴ $ع_{١}ع_{٢}$ = ٦ (جتا ط + ت جا ط)

∴ الصورة الأسية للعدد $ع_{١}ع_{٢}$ = ٦ $هـ^{ت ط}$ (المطلوب أولاً)

ثانياً : $ع_{١}$ = ٢ (جتا $\frac{٤ط}{٣}$ + ت جا $\frac{٤ط}{٣}$) ∴ $ع_{١}^{٢}$ = ٤ (جتا $\frac{٨ط}{٣}$ + ت جا $\frac{٨ط}{٣}$)

∴ $ع_{١}^{٢}$ = ٤ (جتا $\frac{٢ط}{٣}$ + ت جا $\frac{٢ط}{٣}$)

∴ الصورة الأسية للعدد المركب $ع_{١}^{٢}$ = ٤ $هـ^{\frac{٢ط ت}{٣}}$ .... (المطلوب ثانياً)

ثالثاً : ∵ $ع_{٢}$ = ٣ (جتا $\frac{٥ط}{٣}$ + ت جا $\frac{٥ط}{٣}$) ∴ $ع_{٢}^{٤}$ = $٣^{٤}$ (جتا $\frac{٥ط}{٣}$ × ٤ + ت جا $\frac{٥ط}{٣}$ × ٤)

∴ $ع_{٢}^{٤}$ = ٨١ (جتا $\frac{٢٠ط}{٣}$ + ت جا $\frac{٢٠ط}{٣}$) ∴ $ع_{٢}^{٤}$ = ٨١ (جتا $\frac{٢ط}{٣}$ + ت جا $\frac{٢ط}{٣}$)

∴ الصورة الأسية للعدد المركب $ع_{٢}^{٤}$ = ٨١ $هـ^{\frac{٢ط ت}{٣}}$ .... (المطلوب ثالثاً)

الأعداد المركبة

(١٤) أوجد في الصورة الأسية حلول المعادلة $س^٥ + ٣٢ = ٠$ حيث $س \in ك$

الحـــــل

∵ $س^٥ + ٣٢ = ٠$ 　　 $س^٥ = -٣٢ = ٣٢ ($ جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠ $)$

$س = ٢ ($ جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠ $)^{\frac{١}{٥}}$

$س = ٢ ($ جتا $\frac{١٨٠ + ٢ ط ر}{٥}$ + ت جا $\frac{١٨٠ + ٢ ط ر}{٥})$

عندما ر = ٠ فإن س = ٢ (جتا ٣٦ + ت جا ٣٦) = ٢ $هـ^{\frac{٣}{٥} ط ت}$

عندما ر = ١ فإن س = ٢ (جتا ١٠٨ + ت جا ١٠٨) = ٢ $هـ^{\frac{١}{٥} ط ت}$

عندما ر = ٢ فإن س = ٢ (جتا ١٨٠ + ت جا ١٨٠) = ٢ $هـ^{ط ت}$

عندما ر = ٣ فإن س = ٢ (جتا ٢٥٢ + ت جا ٢٥٢) = ٢ $هـ^{\frac{٧}{٥} ط ت}$

عندما ر = ٤ فإن س = ٢ (جتا ٣٢٤ + ت جا ٣٢٤) = ٢ $هـ^{\frac{٩}{٥} ط ت}$

(١٥) إذا كان ع = جتا Θ + ت جا Θ ، $ع_١ = \frac{١ + ع}{١ - ع}$ فاثبت ان :

$ع_١$ = ت ظتا $\frac{١}{٢}$Θ 　 ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد $ع_١$ عندما Θ = $\frac{١}{٢}$ط بالصورة المثلثية والأسية

الحل

∵ ١ + ع = ١ + جتا Θ + ت جا Θ = ٢ $جتا^٢$ $\frac{١}{٢}$Θ + ٢ ت جا $\frac{١}{٢}$Θ جتا $\frac{١}{٢}$Θ

= ٢ جتا $\frac{١}{٢}$Θ (جتا $\frac{١}{٢}$Θ + ت جا $\frac{١}{٢}$Θ)

∵ ١ - ع = ١ - جتا Θ - ت جا Θ = ٢ $جا^٢$ $\frac{١}{٢}$Θ - ٢ ت جا $\frac{١}{٢}$Θ جتا $\frac{١}{٢}$Θ

= ٢ جا $\frac{١}{٢}$Θ (جا $\frac{١}{٢}$Θ - ت جتا $\frac{١}{٢}$Θ)

= ٢ جا $\frac{١}{٢}$Θ [جتا($\frac{٣}{٢}$ط + $\frac{١}{٢}$Θ) + ت جا($\frac{٣}{٢}$ط + $\frac{١}{٢}$Θ)]

∴ $ع_١ = \frac{٢ \text{ جتا } \frac{١}{٢}Θ (\text{جتا } \frac{١}{٢}Θ + \text{ت جا } \frac{١}{٢}Θ)}{٢ \text{ جا } \frac{١}{٢}Θ [\text{جتا}(\frac{٣}{٢}ط + \frac{١}{٢}Θ) + \text{ت جا}(\frac{٣}{٢}ط + \frac{١}{٢}Θ)]}$

الأعداد المركبة

∴ ع١ = ظتا ½ θ [جتا(−½ ط) + ت جا(−½ ط)]

∴ ع١ = ظتا ½ θ [جتا ½ ط + ت جا ½ ط]

∴ ع١ = ت ظتا ½ θ ، عندما θ = ½ ط فإن ع١ = ت ظتا ٤٥ = ت

∴ ع١ = جتا ٩٠ + ت جا ٩٠ = هـ^(½ ط ت)

∛ع١ = (جتا ٩٠ + ت جا ٩٠)^(⅓) = (جتا (٩٠ + ٢ط ر)/٣ + ت جا (٩٠ + ٢ط ر)/٣)

عندما ر = ٠ فإن ∛ع١ = (جتا ٣٠ + ت جا ٣٠) = هـ^(⅙ ط ت)

عندما ر = ١ فإن ∛ع١ = (جتا ١٥٠ + ت جا ١٥٠) = هـ^(⅚ ط ت)

عندما ر = ٢ فإن ∛ع١ = (جتا ٢٧٠ + ت جا ٢٧٠) = هـ^(³⁄₂ ط ت)

(٢٦) إذا كانت ع + ٢ = ت (ع − ٢) حيث ت = −١ فأوجد العدد المركب ع على الصورة المثلثية ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع بالصورة الأسية.

الحـــــل

∵ ع + ٢ = ت ع − ٢ت ، ⟵ ∴ ع − ت ع = − ٢ − ٢ت

(١ − ت) ع = − ٢ − ٢ت ⟵ ع = (− ٢ − ٢ت) / (١ − ت)

∴ ع = −٢(١ + ت)/(١ − ت) × (١ + ت)/(١ + ت) = −٢(١ − ١ + ٢ت)/٢ = − ٢ت

ع = ٢(جتا ٢٧٠ + ت جا ٢٧٠) = ٢ هـ^(³⁄₂ ط ت)

√ع = √٢ (جتا ٢٧٠ + ت جا ٢٧٠)^(½)

√ع = √٢ (جتا (٢٧٠ + ٢ط ر)/٢ + ت جا (٢٧٠ + ٢ط ر)/٢)

عندما ر = ٠ فإن √ع = √٢ (جتا ١٣٥ + ت جا ١٣٥) = √٢ هـ^(¾ ط ت)

عندما ر = ١ فإن √ع = √٢ (جتا ٣١٥ + ت جا ٣١٥) = √٢ هـ^(⁷⁄₄ ط ت)

الأعداد المركبة

(٣٧) إذا كان $\text{ل} = \frac{\text{٢ + ت}}{\text{١ + ت}}$ ، $\text{م} = \frac{\text{١ + ٢ ت}}{\text{١ + ت}}$ برهن أن :

ل ، م مترافقان ثم أوجد قيمة $\sqrt{\frac{٢}{٣}\left(\text{١٣ ل} - \text{٥ م}\right)}$

الحل

$$\text{ل} = \frac{\text{٢ + ت}}{\text{١ + ت}} \times \frac{\text{١ − ت}}{\text{١ − ت}} = \frac{\text{٣ − ت}}{٢} = \frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢}\text{ت}$$

$$\text{م} = \frac{\text{١ + ٢ ت}}{\text{١ + ت}} \times \frac{\text{١ − ت}}{\text{١ − ت}} = \frac{\text{٣ + ت}}{٢} = \frac{٣}{٢} + \frac{١}{٢}\text{ت}$$

$$\frac{٢}{٣}\left(\text{١٣ ل − ٥ م}\right) = \frac{٢}{٣}\left(\frac{٣٩}{٢} - \frac{١٣}{٢}\text{ت} - \frac{١٥}{٢} - \frac{٥}{٢}\text{ت}\right)$$

$$= \frac{٢}{٣}\left(\text{١٢ − ٩ ت}\right) = \text{٨ − ٦ ت}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{٢}{٣}\left(\text{١٣ ل − ٥ م}\right)} = \sqrt{\text{٨ − ٦ت}}$$

بفرض أن $\text{س + ت ص} = \sqrt{\text{٨ − ٦ت}}$ بتربيع الطرفين

$$\therefore \text{س}^٢ - \text{ص}^٢ + \text{٢ س ص ت} = \text{٨ − ٦ ت}$$

$$\therefore \text{س}^٢ - \text{ص}^٢ = ٨ \quad \text{.................. (١)}$$

$$\text{٢ س ص} = -٦ \longrightarrow \text{س ص} = -٣$$

$$\text{س}^٢\,\text{ص}^٢ = ٩ \quad \text{.................. (٢)} \quad \text{بضرب (١)} \times \text{س}^٢$$

$$\text{س}^٤ - \text{س}^٢\,\text{ص}^٢ = \text{٨ س}^٢ \longrightarrow \text{س}^٤ - ٩ = \text{٨ س}^٢$$

$$\text{س}^٤ - \text{٨ س}^٢ - ٩ = ٠ \longrightarrow (\text{س}^٢ + ١)(\text{س}^٢ - ٩) = ٠$$

$$\therefore \text{س}^٢ = -١ \ \text{مرفوضة} \qquad \therefore \text{س}^٢ = ٩ \longrightarrow \text{س} = \pm ٣$$

عند س = ٣ فإن ص = −١ ، عند س = −٣ فإن ص = ١

$$\therefore \sqrt{\frac{٢}{٣}\left(\text{١٣ ل − ٥ م}\right)} = \pm ٣ \mp \text{ت} = \pm(\text{٣ − ت})$$

حل آخر : $\sqrt{\text{٨ − ٦ت}} = \sqrt{\text{٩ − ٦ت − ١}} = \sqrt{(\text{٣ − ت})^٢} = \pm(\text{٣ − ت})$

(١٨) أوجد المقياس والسعة الأساسية للعدد المركب

$$\text{ع} = \frac{\text{ع}_1 \, \text{ع}_2}{\text{ع}_3} \quad \text{حيث } \text{ع}_1 = 1 + \sqrt{3}\,\text{ت} \ ،$$

$$\text{ع}_2 = \left(\text{جتا } \tfrac{1}{2}\theta + \text{ت جا } \tfrac{1}{2}\theta\right)^2$$

، $\text{ع}_3 = (\text{جتا}\,\theta - \text{ت جا}\,\theta)$ ثم أوجد الجذرين التربيعيين

للعدد ع في الصورة الأسية عندما $\theta = \frac{2}{3}$ ط

الحـل

$\text{ع}_1 = 2\,(\text{جتا } 60 + \text{ت جا } 60)$

، $\text{ع}_2 = \text{جتا}\,\theta + \text{ت جا}\,\theta$

، $\text{ع}_3 = \text{جتا}\,(360 - \theta) + \text{ت جا}\,(360 - \theta)$

$$\therefore \text{ع} = \frac{2\,[\text{جتا}\,(60 + \theta) + \text{جا}\,(60 + \theta)]}{\text{جتا}\,(360 - \theta) + \text{جا}\,(360 - \theta)}$$

$\text{ع} = 2\,[\text{جتا}\,(60 + 2\theta) + \text{ت جا}\,(60 + 2\theta)]$

وعند $\theta = \frac{2}{3}$ ط فإن: $\text{ع} = 2\,(\text{جتا } 2\text{ط} + \text{ت جا } 2\text{ط})$

$$\sqrt{\text{ع}} = \sqrt{2}\,(\text{جتا } 360 + \text{ت جا } 360)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{\text{ع}} = \sqrt{2}\left(\text{جتا}\,\frac{360 + 2\text{ط ر}}{2} + \text{ت جا}\,\frac{360 + 2\text{ط ر}}{2}\right)$$

عند ر = ٠ فإن $\sqrt{\text{ع}} = \sqrt{2}\,(\text{جتا } 180 + \text{ت جا } 180) = \sqrt{2}\,\text{هـ}^{\text{ط ت}}$

عند ر = ٠ فإن $\sqrt{\text{ع}} = \sqrt{2}\,(\text{جتا } 360 + \text{ت جا } 360) = \sqrt{2}\,\text{هـ}^{2\text{ط ت}}$

فكر) أثبت أن: $\left[\dfrac{1 + \text{حا}\,\theta + \text{ت حتا}\,\theta}{1 + \text{حا}\,\theta - \text{ت حتا}\,\theta}\right]^{8} = \text{حتا } 8\theta - \text{ت حا } 8\theta$

الأعداد المركبة

(١٩) أوجد مجموعة حل المعادلة $\text{س}^{2} - \text{ت س} + ١ = ٠$ في ك

الحل

$\text{أ} = ١$ ، $\text{ب} = -\text{ت}$ ، $\text{جـ} = ١$

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{2} - ٤\,\text{أ جـ}}}{٢\text{أ}} = \frac{\text{ت} \pm \sqrt{-١ - ٤}}{٢}$$

$$\text{س} = \frac{\text{ت} \pm \sqrt{-٥}}{٢} = \frac{\text{ت} \pm \sqrt{٥}\,\text{ت}}{٢} = \frac{(١ \pm \sqrt{٥})\,\text{ت}}{٢}$$

(٢٠) إذا كان $\text{ع}_{١} = \frac{٢(٢ + \text{ت})}{٣ - \text{ت}}$ ، $\text{ع}_{٢} = ٢(\text{جا}\,٣٠ + \text{ت جتا}\,٣٠)$

أوجد الصورة المثلثية للعددين $\text{ع}_{١}$ ، $\text{ع}_{٢}$ ثم أوجد :

(١) $\text{ع}_{١}\,\text{ع}_{٢}$ بالصورة الجبرية والصورة الأسية

(٢) استنتج $\text{جتا}\,\frac{٧}{١٢}\text{ط}$ ، $\text{جا}\,\frac{٧}{١٢}\text{ط}$

الحـــل

$$\because \text{ع}_{١} = \frac{٤ + ٢\text{ت}}{٣ - \text{ت}} \times \frac{٣ + \text{ت}}{٣ + \text{ت}} = \frac{١٠ + ١٠\text{ت}}{١٠} = ١ + \text{ت}$$

$\therefore \text{ل} = \sqrt{٢}$ ، $\theta = ٤٥$

$\therefore \text{ع}_{١} = \sqrt{٢}\,(\text{جتا}\,٤٥ + \text{ت جا}\,٤٥)$

$\because \text{ع}_{٢} = ٢(\text{جا}\,٣٠ + \text{ت جتا}\,٣٠)$ $\therefore \text{ع}_{٢} = ٢(\text{جتا}\,٦٠ + \text{ت جا}\,٦٠)$

$\therefore \text{ع}_{٢} = ١ + \sqrt{٣}\,\text{ت}$

$\therefore \text{ع}_{١}\,\text{ع}_{٢} = \sqrt{٢}\,(\text{جتا}\,٤٥ + \text{ت جا}\,٤٥) \times ٢(\text{جتا}\,٦٠ + \text{ت جا}\,٦٠)$

$\text{ع}_{١}\,\text{ع}_{٢} = ٢\sqrt{٢}\,(\text{جتا}\,١٠٥ + \text{ت جا}\,١٠٥)$

$\therefore \text{ع}_{١}\,\text{ع}_{٢} = (١ + \text{ت})(١ + \sqrt{٣}\,\text{ت}) = (١ - \sqrt{٣}) + (١ + \sqrt{٣})\,\text{ت}$

$\therefore ٢\sqrt{٢}\,(\text{جتا}\,١٠٥ + \text{ت جا}\,١٠٥) = (١ - \sqrt{٣}) + (١ + \sqrt{٣})\,\text{ت}$

$$\text{جتا}\,١٠٥ = \frac{١ - \sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢} - \sqrt{٦}}{٤} \text{ ، } \text{جا}\,١٠٥ = \frac{١ + \sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢} + \sqrt{٦}}{٤}$$

الأعداد المركبة

(٢١) بوضع $\text{ى} = \frac{1}{2}\text{ط} - 2\theta$ أو بأية طريقة أخرى حيث $\text{ت}^2 = -1$

أثبت أن $\left(\dfrac{1 + \text{جاى} + \text{ت جتاى}}{1 + \text{جاى} - \text{ت جتاى}}\right)^{\text{ن}} = \text{جتا ن}\left(\frac{1}{2}\text{ط} - \text{ى}\right) + \text{ت جا ن}\left(\frac{1}{2}\text{ط} - \text{ى}\right)$

الحـــل

$$\frac{1 + \text{جاى} + \text{ت جتاى}}{1 + \text{جاى} - \text{ت جتاى}} = \frac{1 + \text{جا}\left(\frac{1}{2}\text{ط} - 2\theta\right) + \text{ت جتا}\left(\frac{1}{2}\text{ط} - 2\theta\right)}{1 + \text{جا}\left(\frac{1}{2}\text{ط} - 2\theta\right) - \text{ت جتا}\left(\frac{1}{2}\text{ط} - 2\theta\right)}$$

$$= \frac{1 + \text{جتا}2\theta + \text{ت جا}2\theta}{1 + \text{جتا}2\theta - \text{ت جا}2\theta} = \frac{2\text{جتا}^2\theta + 2\,\text{ت جا}\theta\,\text{جتا}\theta}{2\text{جتا}^2\theta - 2\,\text{ت جا}\theta\,\text{جتا}\theta}$$

$$= \frac{2\text{جتا}\theta\left(\text{جتا}\theta + \text{ت جا}\theta\right)}{2\text{جتا}\theta\left(\text{جتا}\theta - \text{ت جا}\theta\right)}$$

$$= \frac{\text{جتا}\theta + \text{ت جا}\theta}{\text{جتا}(360 + \theta) + \text{ت جا}(360 + \theta)}$$

$$= \text{جتا}(\theta - 360 + \theta) + \text{ت جا}(\theta - 360 + \theta)$$

$= \text{جتا}2\theta + \text{ت جا}2\theta$ ولكن $2\theta = \frac{1}{2}\text{ط} - \text{ى}$

$$= \text{جتا}\left(\frac{1}{2}\text{ط} - \text{ى}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{1}{2}\text{ط} - \text{ى}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{1 + \text{جاى} + \text{ت جتاى}}{1 + \text{جاى} - \text{ت جتاى}}\right)^{\text{ن}} = \left[\text{جتا}\left(\frac{1}{2}\text{ط} - \text{ى}\right) + \text{ت جا}\left(\frac{1}{2}\text{ط} - \text{ى}\right)\right]^{\text{ن}}$$

$$= \text{جتا ن}\left(\frac{1}{2}\text{ط} - \text{ى}\right) + \text{ت جا ن}\left(\frac{1}{2}\text{ط} - \text{ى}\right)$$

الأعداد المركبة

فكر (١) إذا كانت ع = $ت^{٤ن - ١٧}$ ، أوجد على الصورة المثلثية والأسية $\sqrt[3]{ع}$

(٢) أثبت أن : $\left[\frac{١ + حا\,\theta + ت\,حتا\,\theta}{١ + حا\,\theta - ت\,حتا\,\theta}\right]^{٨}$ = حتا ٨ θ − ت حا ٨ θ

(٣) إذا كان ع = حتا $\frac{ط}{٣}$ + ت حا $\frac{ط}{٣}$ حيث $ت^{٢}$ = −١ فأوجد كلاً من العددين $ع_{١}$ = ع − ١ ، $ع_{٢}$ = ع + ١ في الصورة المثلثية ومن ثم برهن على أن العدد المركب $\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$ يكون عدداً تخيلياً صرفاً .

[$ع_{١}$ = حتا $\frac{٢ط}{٣}$ + ت حا $\frac{٢ط}{٣}$ ، $ع_{٢}$ = $\sqrt{٣}$ (حتا $\frac{ط}{٦}$ + ت حا $\frac{ط}{٦}$)]

(٤) إذا كانت : س = $\frac{-١ + \sqrt{٣}ت}{٢}$ حيث $ت^{٢}$ = −١
فأوجد القيمة العددية للمقدار : $س^{٨}$ + $س^{٤}$ + ٥ (٤)

منتدى توجيه الرياضيات عادل إدوار

الجزور التكعيبية للواحد الصحيح

(١) إذا كان ١ ، ω ، ω^2 هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأثبت أن :

أولاً : $(1+\omega)^{16}=\omega^2$ ثانياً : $(1-\omega-\omega^2)^3=8$

ثالثاً : $(1-\omega)(1-\omega^2)=3$ رابعاً : $(1-2\omega+\omega^2)(1+\omega-5\omega^2)=18$

الحل

أولاً : ∵ $1+\omega=-\omega^2$ ∴ $(1+\omega)^{16}=(-\omega^2)^{16}$

∴ $(1+\omega)^{16}=\omega^{32}=\omega^{30+2}=\omega^2$ (وهو المطلوب)

ثانياً : ∵ $1-\omega-\omega^2=1-(\omega+\omega^2)=1-(-1)=2$

∴ $(1-\omega-\omega^2)^3=(2)^3=8$ (وهو المطلوب)

ثالثاً : $(1-\omega)(1-\omega^2)=1-\omega-\omega^2+\omega^3$

$=1-(\omega+\omega^2)+1=1-(-1)+1=1+1+1=3$ (وهو المطلوب)

رابعاً : ∵ $1-2\omega+\omega^2=(1+\omega^2)-2\omega=-\omega-2\omega=-3\omega$

، $1+\omega-5\omega^2=(1+\omega)-5\omega^2=-\omega^2-5\omega^2=-6\omega^2$

∴ $(1-2\omega+\omega^2)(1+\omega-5\omega^2)=-3\omega\times-6\omega^2$

$=18\omega^3=18$ (وهو المطلوب)

(٢) أثبت أن $\left(\frac{1}{1+2\omega}-\frac{1}{1+2\omega^2}\right)^2=-\frac{4}{3}$

الحل

$\frac{1}{1+2\omega}-\frac{1}{1+2\omega^2}=\frac{(1+2\omega^2)-(1+2\omega)}{(1+2\omega)(1+2\omega^2)}$

$=\frac{2\omega^2-2\omega}{1+2\omega+2\omega^2+4\omega^3}$

$=\frac{2(\omega^2-\omega)}{1+2(\omega+\omega^2)+4}=\frac{2(\omega^2-\omega)}{1-2+4}=\frac{2}{3}(\omega^2-\omega)$

∴ $\left(\frac{1}{1+2\omega}-\frac{1}{1+2\omega^2}\right)^2=\frac{4}{9}(\omega^2-\omega)^2$

$=\frac{4}{9}\times(\pm\sqrt{3}\,i)^2=\frac{4}{9}\times-3=-\frac{4}{3}$

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

(٣) أثبت أن :
$$\frac{5-4\omega+11\omega^2}{1-2\omega+3\omega^2}=3$$

الحل

الطرف الأيمن
$$=\frac{5-4(-1-\omega^2)+11\omega^2}{1-2(-1-\omega^2)+3\omega^2}=\frac{5+4+4\omega^2+11\omega^2}{1+2+2\omega^2+3\omega^2}$$

$$=\frac{9+15\omega^2}{3+5\omega^2}=\frac{3(3+5\omega^2)}{3+5\omega^2}=3=\text{الطرف الأيسر}$$

(٤) أوجد قيمة :
$$\left[\frac{1}{2+3\omega}-\frac{1}{2+3\omega^2}\right]^2$$

الحل

$$\because \frac{1}{2+3\omega}-\frac{1}{2+3\omega^2}=\frac{(2+3\omega^2)-(2+3\omega)}{(2+3\omega)(2+3\omega^2)}$$

$$=\frac{3(\omega^2-\omega)}{7}=\frac{3}{7}\times\pm\sqrt{3}\,\text{ت}$$

$$\therefore \text{المقدار}=\left(\frac{3}{7}\times\pm\sqrt{3}\,\text{ت}\right)^2=-\frac{27}{49}$$

(٥) أثبت أن العددان : $\text{ل}+\omega\,\text{م}$ ، $\text{ل}+\omega^2\,\text{م}$ مترافقان حيث : ل ، م عددان حقيقيان

الحل

$\because$ مجموع العددين $=2\,\text{ل}+(\omega+\omega^2)\,\text{م}=2\,\text{ل}-\text{م}=$ عدد حقيقي

$\because$ حاصل ضرب العددين $=\text{ل}^2+\text{م}^2+2\,\text{ل}\,\text{م}\,(\omega+\omega^2)$

$=\text{ل}^2+\text{م}^2-2\,\text{ل}\,\text{م}=$ عدد حقيقي

$\therefore$ العددان : $\text{ل}+\omega\,\text{م}$ ، $\text{ل}+\omega^2\,\text{م}$ مترافقان

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

(٦) كون المعادلة التى جذراها : $(1+\omega-\omega^2)^3$ ، $(1-\omega+\omega^2)^3$

الحل

$$(1+\omega-\omega^2)^3 = (-\omega^2-\omega^2)^3 = (-2\omega^2)^3 = -8$$

بالمثل : $(1-\omega+\omega^2)^3 = -8$

∴ الجذران هما : -8 ، -8

∴ مجموع العددين = -16 ، حاصل ضربهما = 64

∴ المعادلة هى : $\text{س}^2 - 16\,\text{س} + 64 = 0$

(٧) أوجد مجموعة حل المعادلة : $\text{س}^2 - 2\omega\,\text{س} - \omega = 0$

$$\text{س} = \frac{2\omega \pm \sqrt{4\omega^2 + 4\omega}}{2} = \frac{2\omega \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2\omega \pm \sqrt{4\text{ت}^2}}{2}$$

$$= \frac{2\omega \pm 2\text{ت}}{2} = \omega \pm \text{ت}$$

∴ مجموعة الحل = $\{\omega + \text{ت} ، \omega - \text{ت}\}$

(٨) حل المعادلة : $\text{س} = 1 + \omega^{\text{س}} + \omega^{2\text{س}}$

الحل

∵ $\text{س} = 1 + \omega^{\text{س}} + \omega^{2\text{س}}$ ∴ $\text{س} - 1 = \omega^{\text{س}} + \omega^{2\text{س}}$

، بتربيع الطرفين ينتج :

$$\text{س}^2 - 2\text{س} + 1 = \omega^{2\text{س}} + 2 + \omega^{\text{س}}$$

$$= (1 + \omega^{\text{س}} + \omega^{2\text{س}}) + 1 = \text{س} + 1$$

∴ $\text{س}^2 - 3\text{س} = 0$ ∴ $\text{س}(\text{س} - 3) = 0$

∴ $\text{س} = 0$ أو $\text{س} - 3 = 0$

عندما : $\text{س} = 0$ الطرف الأيسر $= 3$ ∴ $\text{س} = 0$ لا يحقق المعادلة

عندما : $\text{س} = 3$ الطرف الأيسر $= 3$ ∴ $\text{س} = 3$ يحقق المعادلة

∴ مجموعة الحل = $\{3\}$

الجزور التكعيبية للواحد الصحيح

(٩) إذا كان : $\left[\frac{\omega^2}{1+2\omega^2}\right]^4+\left[\frac{1+2\omega}{\omega}\right]^4=ك\,\omega^2$ أوجد قيمة ك

الحـــل

$\because\ 1+2\omega^2=1+\omega^2+\omega^2=-\omega+\omega^2=\pm\sqrt{3}\,ت$

$\therefore\ (1+2\omega^2)^4=9$ ، بالمثل : $(1+2\omega)^4=9$

$\omega^8=\omega^2$ ، $\omega^4=\omega$

$\therefore$ الطرف الأيمن $=\frac{\omega^2}{9}+\frac{9}{\omega}=\frac{\omega^3+81}{9\omega}=\frac{82}{9}\omega^2$

$\therefore\ ك=\frac{82}{9}$

طريقة أخرى $\left[\frac{\omega^2}{1+2\omega^2}\right]^4=\left(\left(\frac{\omega^2}{1+2\omega^2}\right)^2\right)^2=\left(\frac{\omega^4}{1+4\omega+4\omega^2}\right)^2$

$=\left(\frac{\omega}{-3}\right)^2=\frac{\omega^2}{9}$

بالمثل $\left[\frac{1+2\omega}{\omega}\right]^4=\left(\frac{1+4\omega+4\omega^2}{\omega^2}\right)^2=\left(\frac{-3}{\omega^2}\right)^2=\frac{9}{\omega}$

$\therefore$ الطرف الأيمن $=\frac{\omega^2}{9}+\frac{9}{\omega}=\frac{\omega^3+81}{9\omega}=\frac{82}{9}\omega^2$

$\therefore\ ك=\frac{82}{9}$

الجزور التكعيبية للواحد الصحيح

(١٠) أثبت أن:- $\left(\frac{13+\omega}{13\omega^2+1}-\frac{17-9\omega^2}{17\omega-9}\right)^6=-27$

الحـــل

الطرف الأيمن = $\left(\frac{13\omega^3+\omega}{13\omega^2+1}-\frac{17\omega^3-9\omega^2}{17\omega-9}\right)^6$

$=\left(\frac{\omega(13\omega^2+1)}{13\omega^2+1}-\frac{\omega^2(17\omega-9)}{17\omega-9}\right)^6$

$=\left(\omega-\omega^2\right)^6=\left(\pm\sqrt{3}\,ت\right)^6=27\times ت^6$

$=27\,ت^2=27\times-1=-27=$ الطرف الأيسر

(١١) أثبت أن:- $\left(\frac{3\omega^2+2\omega+7}{2\omega^2+7\omega+3}+\frac{5-8\omega}{8-5\omega^2}\right)^8=81$

الحـــل

الطرف الأيمن = $\left(\frac{3\omega^2+2\omega+7}{2\omega^4+7\omega+3\omega^3}-\frac{5\omega^3-8\omega}{8-5\omega^2}\right)^8$

$=\left(\frac{3\omega^2+2\omega+7}{\omega(2\omega+7+3\omega^2)}-\frac{\omega(5\omega^2-8)}{8-5\omega^2}\right)^8$

$=\left(\frac{1}{\omega}-\frac{-\omega}{1}\right)^8=\left(-\omega^2+\omega\right)^8$

$=\left(\pm\sqrt{3}\,ت\right)^8=81\times ت^8=81\times1=81$

الجزور التكعيبية للواحد الصحيح

(١٢) كون معادلة من الدرجة الثانية جذريها :

$$\frac{2+\omega^{4}}{1-\omega^{16}} \quad ، \quad \frac{2+\omega^{14}}{1-\omega^{2}}$$

الحـــل

مجموع الجذرين $= \dfrac{2+\omega}{1-\omega} + \dfrac{2+\omega^2}{1-\omega^2}$

$$= \frac{2 - 2\omega^2 + \omega - \omega^3 + 2 - 2\omega + \omega^2 - \omega^3}{1 - \omega^2 - \omega + \omega^3}$$

$$= \frac{2 - \omega^2 - \omega}{1+1+1} = \frac{3}{3} = 1$$

حاصل ضرب الجذرين $= \dfrac{2+\omega}{1-\omega} \times \dfrac{2+\omega^2}{1-\omega^2} = \dfrac{4 + 2\omega^2 + 2\omega + \omega^3}{1 - \omega^2 - \omega + \omega^3}$

$$= \frac{4 + 2(\omega^2+\omega) + 1}{1+1+1} = \frac{3}{3} = 1$$

المعادلة هي : $س^2 - س + 1 = 0$

(١٢) أثبت أن $\frac{3}{2}$ ت هى أحد الجذرين التربيعيين للمقدار :

$$\frac{1 + 10\omega + 10\omega^2}{1 - 3\omega - 3\omega^2}$$

الحـــل

المقدار $= -\frac{9}{4} = \frac{9}{4}$ ت^2

∴ جذرى المقدار هما : $\pm \frac{3}{2}$ ت

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

أنتهت المراجعة

مع كل تمنياتى لكم بالنجاح والتفوق

مع تحيات أسرة توجيه الرياضيات